Челябинский государственный университет

Г.А.Свиридюк В.Е.Федоров

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
Часть I

Учебное пособие

Челябинск
1999

Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации

Челябинский государственный университет

Г.А.Свиридюк В.Е.Федоров

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
Часть I

Учебное пособие

Челябинск 1999

ББК В16 я 73
С247

УДК 517.9

С247 Математический анализ. Ч. I : Учеб. пособие / Г.А.Свиридюк, В.Е.Федоров; Челяб. гос. ун-т. Челябинск, 1999. 158 с.
ISBN 5-230-20012-х

Пособие охватывает большой раздел курса математического анализа, читаемый в первом семестре студентам, обучающимся по специальности "Прикладная математика". Несколько нестандартное разбиение материала на главы логически и методически вполне обосновано. Большое количество упражнений позволяет читателю лучше освоить предлагаемый материал и используемые методы.

Предназначено для студентов математических специальностей.

Библиогр.: 12 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Челябинского государственного университета.

Рецензенты: кафедра математического анализа ЧГПУ;
канд. физ.-мат. наук, доц. Л.В.Матвеева

$\text{Ф}\dfrac{1702050000-012}{4\text{К}8(03)-99}$ Без объявл. В 16 я 73-1

ISBN 5-230-20031-6

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Да и вообще я математику не очень люблю.
Марк Твен "Приключения Гекльберри Финна"

0.1 Математический анализ как наука и дисциплина

Как хорошо известно, всякая уважающая себя наука должна иметь в своем распоряжении объект и метод исследований. Не составляет исключения из этого общего правила и математический анализ (сокращенно, МАТАН). Объектом МАТАН'а являются функции и их обобщения, а методом исследования – предельный переход.

Итак, что такое МАТАН – ясно. Теперь нужно понять, что такое функция и что такое предельный переход. И то, и другое – фундаментальные понятия МАТАН'а, содержание и форма которых не раз менялись. Позже мы изложим современное толкование этих понятий, а пока удовлетворимся объяснениями, даваемыми в средней школе.

Под функцией $y = f(x)$ согласно Лобачевскому[1] и Дирихле[2] понимается закон, по которому каждому числу x ставится в соответствии число y. Таким образом определенная функция $y = f(x)$ от одного переменного x является объектом изучения так называемого *одномерного анализа.* Аналогично определяется функция многих переменных $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и даже функция бесконечного числа переменных $y = f(x_1, x_2, \ldots)$, которые изучаются в курсах *конечно-*, соответственно, *бесконечномерного* анализа.

Разумеется, приведенное "определение"функции таковым в действительности не является. Судите сами, там написано "... под функцией $y = f(x)$ понимается закон... ", а что такое "закон"? Читаем далее: "... каждому числу x ... ", а что такое "число"? К обсуждению этих вопросов мы еще вернемся, а сейчас напомним, что несмотря на свое несовершенство это "определение"функции удовлетворяло всех математиков на протяжении более века.

Теперь обратимся к другому фундаментальному понятию МАТАНА'а – пределу. Говорят, что функция $f(x)$ стремится к пределу y_0 при x стремящемся к x_0, если все значения функции $f(x)$ сколь угодно мало отличаются от y_0, коль скоро x находится достаточно

---

[1]Николай Иванович Лобачевский (1792-1856) – русский математик, создавший неевклидову геометрию, носящую его имя.

[2]Петер Густав Лежён Дирихле (1805-1859) – немецкий математик, один из активных творцов анализа.

близко к x_0. В символической записи это выглядит так:

$$f(x) \to y_0 \quad \text{при} \quad x \to x_0 \quad \text{или} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = y_0.$$

(Символ lim от латинского слова "limit", что означает – предел). Точную формулировку этого понятия мы дадим позднее. А сейчас отметим, что предельный переход используется для изучения таких свойств функции как *непрерывность, дифференцируемость* и *интегрируемость*.

Интуитивно понятие непрерывной функции как непрерывного течения совершенно естественно. Наглядно оно выражается так: малое изменение независимой переменной x вызывает лишь малое изменение функции $f(x)$, значения которой не делают внезапных скачков, то есть график функции нигде не разрывается. Однако на интуицию нельзя ссылаться, когда хотят пояснить математическую ситуацию; между интуитивной идеей и математической формулировкой, призванной описывать в точных выражениях важные для науки элементы нашей интуиции, всегда остается разрыв, пробел.

На основе понятия предела можно дать математически совершенно строгое определение непрерывной функции. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

то есть значение функции в точке x_0 равно пределу функции в этой точке.

Лучше уяснить себе понятие непрерывности функции можно в сопоставлении с противоположным ему понятием разрывности. Простейший вид разрывности в некоторой точке состоит в том, что значения функции в этой точке делают скачок. В такой точке разрыва значения функции стремятся к определенным, но различным пределам в зависимости от того, приближается ли x к месту скачка справа или слева.

Простейшей разрывной функцией является функция $y = \mathrm{sgn} x$ (читается "сигнум", от латинского слова "signum" – знак).

$$\mathrm{sgn} x = \begin{cases} -1 \quad \text{при} \quad x < 0; \\ 0 \quad \text{при} \quad x = 0; \\ 1 \quad \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

Пусть значения переменной x лежат как можно ближе к нулю, оставаясь все время слева от него. Тогда ясно, что значения функции $y = \mathrm{sgn} x$ будут все время равны -1. Символично это записывается в виде

$$\lim_{x\to 0-} \mathrm{sgn} x = -1.$$

Теперь пусть значения переменной x лежат как можно ближе к нулю, оставаясь все время справа от него. В этом случае значения функции $y = \mathrm{sgn} x$ будут все время равны 1. В символах это выглядит так

$$\lim_{x\to 0+} \mathrm{sgn} x = 1.$$

Отсюда следует, что функция $y = \mathrm{sgn} x$ предела в точке 0 не имеет и поэтому является разрывной. Действительно, беря переменную x лежащей как можно ближе к нулю то с одной стороны, то с другой попеременно, мы получаем, что функция $y = \mathrm{sgn} x$ будет принимать значения 1 и -1, которые не отличаются друг от друга сколь угодно мало.

Если понятие непрерывности функции достаточно просто и наглядно и нуждается лишь в строгом оформлении, то понятия дифференцируемости и интегрируемости лучше изучать на основе строгих формулировок. Поэтому в заключение мы сделаем весьма краткий экскурс в историю МАТАН'а.

Год рождения МАТАН'а – 1687. В этом году появился фундаментальный труд И.Ньютона[1] "Математические начала натуральной философии". Как наука МАТАН был создан в XVII-XVIII веках усилиями Г.Лейбница[2] и Л.Эйлера[3] В начале XIX века трудами О.Коши[1] и К.Вейерштрасса[2] был разработан метод предельного перехода, что позволило строго сформулировать и доказать основные результаты МАТАН'а. В связи с созданием теории множеств

[1]Исаак Ньютон (1643-1727) – английский физик и математик, основоположник дифференциального и интегрального исчисления.

[2]Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646-1716) – немецкий математик, физик, философ, основоположник математического анализа.

[3]Леонард Эйлер (1707-1783) – швейцарский математик, механик и физик, один из творцов математического анализа.

[1]Огюстен Луи Коши (1789-1857) – французский математик и механик, один из творцов математического анализа.

[2]Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815-1897) – немецкий математик, наряду с О.Коши основоположник строгих методов в математическом анализе.

и теории меры в XX веке МАТАН приобретает законченный вид и становится все более дисциплиной нежели наукой.

В своей предыстории до XVII века МАТАН являл собой совокупность решений разрозненных частных задач; например, задачи на вычисление площадей фигур и объемов тел с кривыми границами. Каждая такая задача решалась своим методом, подчас сложным и громоздким. Решали эти задачи люди, имеющие по меньшей мере университетское образование. Сейчас же, благодаря развитию МАТАН'а, решение таких задач вполне по плечу студентам-первокурсникам.

0.2 Элементы математической логики

Как и любая математическая теория, МАТАН состоит из высказываний, сформулированных по правилам русского (для нас) языка и некоторого особого языка. Чтобы научиться понимать этот второй язык, условимся все высказывания, выраженные повествовательными предложениями, обозначать буквами $A, B, C, \ldots$ Содержание высказываний нас интересовать не будет, однако каждому высказыванию мы будем приписывать число 0 или 1, в зависимости от того, считаем мы это высказывание ложным или истинным. Кроме того, введем следующие символы: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$. Каждому символу сопоставим так называемую *таблицу истинности*:

$$\neg A \qquad \begin{array}{ccc} A & 0 & 1 \\ \neg A & 1 & 0 \end{array} \qquad (\text{читается} \quad "\text{не} \quad A")$$

$$A \wedge B \qquad \begin{array}{ccc} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \qquad (\text{читается} \quad "A \quad \text{и} \quad B")$$

$$A \vee B \qquad \begin{array}{ccc} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad (\text{читается} \quad "A \quad \text{или} \quad B")$$

$$A \Rightarrow B \qquad \begin{array}{ccc} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad (\text{читается} \quad "A \quad \text{влечет} \quad B")$$

$$A \Leftrightarrow B \quad \begin{array}{ccc} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \quad \text{(читается "}A\text{ равносильно }B\text{")}$$

Все высказывания МАТАН'а можно разделить на *аксиомы, определения* и *утверждения.* Аксиомы – это некоторые положения, которые принимаются без доказательства. В частности, придание таблицам истинности именно такого вида, а не какого-либо другого, произведено аксиоматически. Определения – это высказывания, посредством которых либо описывается новый символ (так, как это произошло с описанием логических символов), либо указывается более узкий по сравнению с имеющимся класс объектов. Определения последнего сорта всегда сопровождаются по крайней мере двумя примерами – один для того, чтобы показать, что определяемые объекты существуют, а второй – чтобы показать существование объектов, не подпадающих под данное определение. Действительно, зачем такое определение, которое ничего не определяет, либо определяет все?!

Однако основная часть МАТАН'а – это утверждения. Они подразделяются на *теоремы* и *леммы.* В теоремах формулируются основные результаты, а в леммах – вспомогательные. И теоремы, и леммы обязательно сопровождаются *доказательствами.* Формулировки всех утверждений имеют вид либо $A \Rightarrow B$, либо $A \Leftrightarrow B$. Если $\Rightarrow B$, то мы будем говорить, что A – *достаточное условие* (*достаточный признак*) для B, а B – *необходимое условие* (*необходимый признак*) для A, а если $A \Leftrightarrow B$, то мы будем говорить, что A истинно *точно тогда, когда* истинно B. Доказательства утверждений имеют вид $A \Rightarrow C_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow C_n \Rightarrow B$, где C_k – либо уже доказанное утверждение, либо аксиома.

В качестве примеров утверждений приведем два важнейших высказывания, которые в будущем не раз нам пригодятся.

ПРИНЦИП ИСКЛЮЧЁННОГО ТРЕТЬЕГО. Если A – высказывание, то A или $\neg A$ всегда истинно.

Доказательство этого утверждения очень простое – достаточно посмотреть на соответствующую таблицу истинности. Однако без этого принципа невозможны доказательства утверждений методом "от противного".

КЛАССИЧЕСКОЕ ПРАВИЛО ВЫВОДА. Если A и B – высказывания, A и $A \Rightarrow B$ истинны, то и B истинно.

Доказывается это утверждение так же просто, как и предыдущее – апелляцией к соответствующей таблице истинности. Однако важность его трудно переоценить.

Таблиц истинности вполне достаточно, чтобы доказывать утверждения вида

$$\begin{aligned} &\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B), \\ &\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B), \\ &\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B), \\ &(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Первые два из них известны как правила де Моргана[1], а последним утверждением мы будем часто пользоваться при изучении сходимости рядов.

Изучением такого рода высказываний вне их конкретного содержания занимается *математическая логика.* Мы будем пользоваться понятийным аппаратом этой науки для упрощения записи формулировок утверждений и доказательств.

Введенных нами символов недостаточно для записи высказываний вида "существует $x > 0$", или "любой $x < 0$". Чтобы записывать такие высказывания, используют логические операторы – *кванторы* $\exists$ и $\forall$, а также логические функции, называемые *предикатами.* Квантор $\exists$ читается "существует", "для некоторого", "найдется"; квантор $\forall$ читается "любой", "для всякого". Предикат выражает свойство некоторых объектов и принимает значения 0 и 1 в зависимости от того, какой объект сейчас рассматривается. Скажем, пусть P означает свойство "быть поэтом", а переменная x пробегает множество всех людей. Тогда высказывание $P(x)$ истинно, если $x =$ Пушкин; и ложно, если $x =$ Свиридюк.

Наиболее важной возможностью излагаемого языка является возможность формальным образом (то есть не задумываясь о сути преобразований) строить отрицания любых высказываний. Чтобы осуществить эту возможность в дополнение к (2.1) напишем очевидные

[1]Огастес де Морган (1806-1871) – шотландский математик и логик. Основные работы посвящены основаниям алгебры, арифметики и математического анализа.

соотношения

$$\neg(\exists x \quad P(x)) \Leftrightarrow (\forall x \quad \neg P(x)),$$

$$\neg(\forall x \quad P(x)) \Leftrightarrow (\exists x \quad \neg P(x)).$$

Действительно, отрицание к высказыванию "для некоторого x истинно свойство P"означает, что "для любого x истинно не P"; а отрицание к высказыванию "для любого x истинно P"означает, что "найдется x, для которого истинно не P."Практическая важность правильного построения отрицания связана, в частности, с методом доказательства "от противного", когда истинность некоторого высказывания A извлекают из того, что $\neg A$ ложно.

0.3 Множества и отображения

Г.Кантор[1] – творец теории множеств – так описывал понятие множества: "Под множеством мы понимаем объединение в одно целое определенных, вполне различимых объектов нашей интуиции или нашей мысли."Разумеется, это описание ни в коем случае нельзя считать определением множества, поскольку оно апеллирует к понятиям быть может более сложным (во всяком случае не определенным ранее), чем само понятие множества. Более того, такое описание попросту противоречиво.

Действительно, ничто не мешает "нашей интуиции или нашей мысли"представить себе множество, которое не содержит себя в качестве своего элемента. (Например, множество стульев само стулом не является). Пусть для множества M запись $P(M)$ означает, что M не содержит себя в качестве элемента. Для любого множества M верно либо $\neg P(M)$, либо $P(M)$.

Теперь пусть $K = \{M : P(M)\}$ – множество множеств, обладающих свойством P. Такое множество тоже нетрудно себе представить. Если верно $P(K)$ (то есть множество K не содержит себя в качестве своего элемента), то K лежит в K по определению этого множества, а значит, верно $\neg P(K)$. Если же верно $\neg P(K)$ (то есть множество K содержит себя в качестве элемента), то верно и $P(K)$ по определению K.

[1]Георг Кантор (1845-1918) – немецкий математик, основоположник теории множеств.

Такая ситуация в математике, когда верны одновременно утверждения A и $\neg A$, называется *парадоксом.* Данный парадокс принадлежит Б.Расселу[1], он предупреждает о коварстве так называемого "наивного"определения множества.

В настоящее время в математике известно несколько конкурирующих друг с другом систем аксиом теории множеств, свободных как от парадокса Рассела, так и от других известных парадоксов. В нашу задачу не входит изложение этих систем (и даже какой-либо из них), однако мы можем отметить, что все они принимают множество в качестве первичного (неопределяемого) понятия, то есть понятия, не подвергаемого дальнейшему логическому анализу.

Перейдем к изложению элементов теории множеств, в равной мере присущих всем упомянутым системам. Высказывание

$$(x \in X) \Leftrightarrow (X \ni x)$$

означает, что "x есть элемент множества X". Отрицание этого высказывания записывается как

$$x \notin X \quad \text{или} \quad X \not\ni x.$$

Высказывание

$$\forall x \quad ((x \in A) \Leftrightarrow (x \in B))$$

означает, что множества A и B совпадают. Короче мы будем это высказывание записывать так

$$A = B.$$

Запишем его отрицание

$$A \neq B.$$

Подмножество B множества A определяется высказыванием

$$\forall x \quad ((x \in B) \Rightarrow (x \in A)),$$

а короче записывается так

$$A \supset B \quad \text{или} \quad B \subset A.$$

[1]Бертран Артур Уильям Рассел (1872-1970) – английский математик, философ, логик. Основные работы в области математической логики и оснований математики.

Отрицание его соответственно записывается

$$A \not\supset B \quad \text{или} \quad B \not\subset A.$$

ТЕОРЕМА 3.1. $((A \subset B) \wedge (A \supset B)) \Leftrightarrow (A = B)$.

$\lhd$ Высказывание $(A = B) \Rightarrow ((A \subset B) \wedge (A \supset B))$ истинно в силу определения. Докажем $((A \subset B) \wedge (A \supset B)) \Rightarrow (A = B)$. Действительно, $((A \subset B) \wedge (A \supset B)) \Leftrightarrow ((\forall x \quad (x \in A \Rightarrow x \in B)) \wedge (\forall x \quad (x \in B \Rightarrow x \in A))) \Leftrightarrow (\forall x \quad (x \in A \Leftrightarrow x \in B)) \Leftrightarrow (A = B)$.$\rhd$

Записью

$$\{x \in M : x \neq x\}$$

введем в рассмотрение *пустое множество*, которое будем обозначать символом $\emptyset$. По определению $\emptyset$ – подмножество любого множества. Кроме него мы будем рассматривать некоторое универсальное множество U, которое называется *универсумом* и подмножествами которого являются все рассматриваемые нами множества.

Универсум U не надо путать с понятием "множества множеств". Универсум существует в любой математической теории и содержит только те множества, которые изучаются методами этой теории. Скажем, в одномерном МАТАН'е универсумом служит множество действительных чисел, к изучению которых мы вскоре перейдем.

Удобно все отношения между множествами иллюстрировать так называемыми *диаграммами* Венна[1]

– читается "множество A в универсуме U";

– читается $A \supset B$.

Далее мы без пояснений введем простейшие операции над множествами, сопровождая их диаграммами Венна. *Объединением* $A \cup B$ множеств A и B называется множество

$$\{x \in U : (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

[1]Джон Венн (1834-1923) – английский математик и логик. Основные работы по вероятностной логике.

Пересечением $A \cap B$ множеств A и B называется множество

$$\{x \in U : (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

Разностью $A \setminus B$ между множеством A и множеством B называется множество

$$\{x \in U : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

Разность между универсумом U и множеством A называется *дополнением* A в U и обозначается через CA.

В теории множеств имеются аналоги правил де Моргана

$$C(A \cup B) = CA \cap CB; \quad C(A \cap B) = CA \cup CB. \tag{3.1}$$

УПРАЖНЕНИЕ 3.1. Доказать равенства (3.1), используя теорему 3.1.

Кортежем длиной n называется упорядоченное множество из n элементов, снабженных номерами от 1 до n, и записанное в порядке: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Понятие упорядоченности множества заключается в следующем: если $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ – два кортежа одинаковой длины, то

$$((x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((x_1 = y_1) \wedge (x_2 = y_2) \wedge \cdots \wedge (x_n = y_n)).$$

Кортеж длины два называется *упорядоченной парой.*

Определим теперь последнюю операцию над множествами. *Декартовым*[1] или *прямым произведением* множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется множество кортежей:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \cdots \wedge x_n \in A_n\}.$$

[1]Рене Декарт (1596-1650) – французский философ, математик, основоположник аналитической геометрии.

Если множество A – круг в горизонтальной плоскости, а множество B – отрезок на вертикальной прямой, то их декартовым произведением $A \times B$ будет цилиндр, имеющий своими проекциями множества A (на горизонтальную плоскость) и B (на вертикальную прямую).

Понятие отображения – фундаментальное наряду с понятием множества понятие в математике. Можно сказать, что любая математическая теория изучает некоторый (вполне определенный) вид множества вместе с некоторым (вполне определенным) видом отображения. (Скажем, МАТАН изучает множества действительных чисел вместе с определенными на них функциями). Ввиду фундаментальности понятия отображения будем считать его неопределяемым; однако опишем его следующим образом: *отображение* – закон, по которому каждому элементу некоторого заданного множества X ставится в соответствие вполне определенный элемент другого заданного множества Y.

Связь между элементами X и Y будем записывать в виде: $Y \ni y = f(x)$, $x \in X$. Множество X будем называть *областью определения* отображения f $(X := \operatorname{dom} f)$, множество $Y_0 = \{y \in Y : (\exists x \in X)(y = f(x))\}$ назовем множеством значений отображения f $(Y_0 := \operatorname{im} f)$. Кроме записи $y = f(x)$ пишут также $f : X \to Y$ и говорят: "f отображает X в Y".

Отображение $f : X \to Y$ порождает множество

$$\text{graph} f := \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y,$$

называемое *графиком отображения.* Обратно, множество $M \subset X \times Y$ определяет отображение точно тогда, когда

$$(\forall x \in X)(\exists! y \in Y)((x, y) \in M).$$

Два отображения f и g называются *равными*, если $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom} g = X$ и $f(x) = g(x)\ \forall x \in X$.

Образом множества $A \subset \operatorname{dom} f = X$ при отображении $f : X \to Y$ называется множество

$$f[A] := \{y \in Y : (\exists x \in A)(y = f(x))\}.$$

Множество
$$f^{-1}[B] := \{x \in X : f(x) \in B\}$$
называют *прообразом* множества B.

Про отображение $f : X \to Y$ говорят, что оно *сюръективно* (или есть отображение X *на* Y), если $f[X] = Y$;

инъективно (или есть *вложение*), если $\forall x_1, x_2 \in X \ (f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)$;

биективно (или *взаимно однозначно*), если оно сюръективно и инъективно одновременно.

Отображение $y = x^2$ будет сюръективным, но не инъективным, если в качестве множества X рассматривать всю ось Ox, а в качестве множества Y рассматривать луч $\{y \geq 0\}$. То же самое отображение $y = x^2$ будет инъективным, но не сюръективным, если в качестве множества X рассматривать луч $\{x \geq 0\}$, а в качестве множества Y рассматривать всю ось Oy. И, наконец, отображение $y = x^2$ будет биективным, если в качестве множеств X и Y рассматривать лучи $\{x \geq 0\}$ и $\{y \geq 0\}$ соответственно.

Если отображение $f : X \to Y$ биективно, то естественно возникает отображение
$$f^{-1} : Y \to X,$$
которое определяется следующим образом: если $y = f(x)$, то $x = f^{-1}(y)$, то есть элементу y ставится в соответствие тот элемент $x \in X$, образом которого при отображении f является y. Ввиду сюръективности такой элемент найдется, а ввиду инъективности он единственный. Таким образом, отображение f^{-1} определено корректно. Это отображение называют *обратным* по отношению к исходному отображению f.

Если отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ таковы, что одно из них (g) определено на множестве значений другого (f), то можно построить новое отображение
$$g \circ f : X \to Z,$$
определяемое формулой $(g \circ f)(x) := g(f(x))$. Построенное отображение $g \circ f$ называют *композицией* (*суперпозицией*) двух отображений f, g.

Отметим еще одно понятие в некотором смысле пограничное между понятиями множества и отображения. Пусть X и Y – некоторые множества. *Отношением* $\mathcal{R}$ называется любое подмножество их декартова произведения $X \times Y$. Другими словами, отношение $\mathcal{R}$ – это множество упорядоченных пар (x, y), где $x \in X$, а $y \in Y$. Часто вместо того, чтобы писать $(x, y) \in \mathcal{R}$, пишут $x\mathcal{R}y$ и говорят, что x *связан с* y *отношением* $\mathcal{R}$, или, что x *находится в отношении* $\mathcal{R}$ *с* y. Если $X = Y$, то есть $\mathcal{R} \subset X \times X = X^2$, то говорят, что *отношение* $\mathcal{R}$ *задано на* X.

ПРИМЕР 3.1. *Диагональ*

$$\triangle = \{(x, y) \in X^2 : x = y\}$$

есть подмножество X^2, задающее отношение равенства между элементами множества X. Действительно, $x \triangle y$ означает, что $(x, y) \in \triangle$, то есть $x = y$.

В дальнейшем нам потребуется два вида отношений. Пусть $\mathcal{R} \subset X^2$ – отношение, удовлетворяющее следующим аксиомам:

$\forall x \in X \; x\mathcal{R}x$ (рефлексивность),

$\forall x, y \in X \; x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$ (симметричность),

$\forall x, y, z \in X \; (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Rightarrow (x\mathcal{R}z)$ (транзитивность),

$\mathcal{R}$ принято называть *отношением эквивалентности* и обозначать символом $\sim$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.2. Показать, что отношение параллельности прямых на плоскости является отношением эквивалентности.

УПРАЖНЕНИЕ 3.3. Найти ошибки в следующем рассуждении. Пусть $\mathcal{R}$ – отношение эквивалентности. Тогда в силу симметричности $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$, а отсюда в силу транзитивности $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow x\mathcal{R}x$. Другими словами, рефлексивность есть следствие симметричности и транзитивности (?).

Другим важным отношением является *отношение частичного порядка* на множестве X, то есть отношение $\mathcal{R} \subset X^2$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

(i) $\forall x \in X \; x\mathcal{R}x$ (рефлексивность),

(ii) $\forall x, y \in X \; (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x) \Rightarrow x \triangle y$, то есть $x = y$ (антисимметричность),

(iii) $\forall x, y, z \in X \; (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Rightarrow (x\mathcal{R}z)$ (транзитивность).

Для отношения частичного порядка вместо вместо $x\mathcal{R}y$ часто пишут $x \leq y$ и говорят, что y *следует за* x.

УПРАЖНЕНИЕ 3.4. Пусть M – некоторое множество, а $\mathcal{P}(M)$ – множество всех его подмножеств. Показать, что отношение включения задает отношение частичного порядка на множестве $\mathcal{P}(M)$.

Теперь пусть X и Y – два произвольных множества. Отношение $\mathcal{R} \subset X \times Y$ называется *функциональным*, если

$$(x\mathcal{R}y_1) \wedge (x\mathcal{R}y_2) \Rightarrow (y_1 = y_2).$$

УПРАЖНЕНИЕ 3.5. Показать, что график $\mathrm{graph} f$ отображения $f : \mathrm{dom}\, f \subset X \to Y$ задает функциональное отношение.

УПРАЖНЕНИЕ 3.6. Показать, что любому функциональному отношению $\mathcal{R} \subset X \times Y$ можно поставить в соответствие некоторое отображение f из множества X во множество Y.

0.4 Элементарные функции

Теперь мы готовы дать строгое определение функции. Под *функцией* $y = f(x)$ мы понимаем отображение $f : X \to \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел, а $X \subset \mathbb{R}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Класс функций, состоящий из постоянных, показательных, логарифмических, степеннных, тригонометрических, обратных тригонометрических, гиперболических, обратных гиперболических, а также функций, полученных из перечисленных выше посредством четырех арифметических операций и композиции, называется классом *элементарных функций.*

Теперь перейдем к определению *основных элементарных функций.* Метод определения, которым мы воспользуемся, носит название *аксиоматический.* Суть его заключается в следующем: при изучении какого-либо математического объекта выделяются некоторые *признаки* этого объекта, называемые *существенными.* Затем эти признаки идут в основу определения объекта. Разумеется после такого определения необходимо еще убедиться, что объект, определенный посредством своих признаков, существует и определен *однозначно*, то есть нужно убедиться, что не существует еще какого-либо объекта, обладающего такими же признаками, что и определенный нами объект.

Аксиоматический метод очень похож на бюрократический подход к делу, когда существо дела подменяется инструкцией. Однако в тех случаях, когда существо дела хорошо всем известно (а именно так обстоит дело с элементарными функциями, знакомыми всем еще со школы), аксиоматический метод обладает рядом преимуществ. Правда, как заметил Б.Рассел, эти преимущества схожи с преимуществом воровства перед честным трудом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Функция $y = f(x)$, обладающая следующими свойствами:

(i) $f(1) = a$, $a > 0$, $a \neq 1$;

(ii) $f(x_1) \cdot f(x_2) = f(x_1 + x_2)$ для любых чисел x_1 и x_2;

(iii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ для любого числа x_0,

называется *показательной функцией* и обозначается $y = a^x$.

ТЕОРЕМА 4.1. *Для любого числа $a > 0$, $a \neq 1$ существует в точности одна показательная функция.*

Заметим, что в силу свойства (iii) показательная функция непрерывна на всей оси Ox.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Функция $y = f(x)$, обладающая следующими свойствами:

(i) $f(a) = 1$, $a > 0$, $a \neq 1$;

(ii) $f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 \cdot x_2)$ для любых положительных чисел x_1 и x_2;

(iii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ для положительного любого числа x_0,

называется *логарифмической функцией* и обозначается $y = \log_a x$.

ТЕОРЕМА 4.2. *Для любого числа $a > 0$, $a \neq 1$ существует в точности одна логарифмическая функция.*

Отметим непрерывность логарифмической функции, имеющую место в силу свойства (iii).

Доказывать теоремы о показательной и логарифмической функциях мы не будем, потому что они были доказаны в средней школе. (Другими словами, суть дела всем известна, необходимо только запомнить инструкцию).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.4. Функцию $y = a^{\alpha \log_a x}$, определенную при произвольном α для любого положительного x, назовем *степенной функцией* и будем обозначать $y = x^\alpha$. Если показатель степени α представляет собой рациональное число $\alpha = \frac{m}{n}$, где n – нечетное число, либо m и n четные одновременно, то степенную функцию $y = x^\alpha$ можно определить на всей оси Ox, полагая для отрицательных x:

$$y = \begin{cases} |x|^\alpha & \text{если } m \text{ - четное;} \\ -|x|^\alpha & \text{если } m \text{ и } n \text{ – нечетные.} \end{cases}$$

Будем по определению считать, что при $\alpha > 0$ $0^\alpha = 0$, $0^0 = 1$.

В теореме о существовании единственной степенной функции по большому счету нет необходимости, так как она определяется через показательную и логарифмическую функции, соответствующие теоремы для которых мы уже сформулировали.

Степенные функции также обладают свойством *непрерывности.* Доказательство этого утверждения опирается на другой более фундаментальный факт – сумма, разность, произведение, частное и композиция двух непрерывных функций непрерывны. (При рассмотрении частного двух функций делается обычная оговорка о неравенстве нулю знаменателя). Другими словами, применение арифметических действий и композиции не выведет нас за пределы класса непрерывных функций. Доказательство этого фундаментального факта мы проведем позднее.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.5. Функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, обладающие следующими свойствами:

(i) $f(x_1 + x_2) = f(x_1)g(x_2) + f(x_2)g(x_1)$ для любых чисел x_1 и x_2;
(ii) $g(x_1 + x_2) = g(x_1)g(x_2) - f(x_1)f(x_2)$ для любых чисел x_1 и x_2;
(iii) $f^2(x) + g^2(x) = 1$ для любого числа x;
(iv) $f(0) = 0$, $g(0) = 1$, $f(\frac{\pi}{2}) = 1$, $g(\frac{\pi}{2}) = 0$;

(v) $0 < f(x) < x < \frac{f(x)}{g(x)}$, если $0 < x < \frac{\pi}{2}$,

называются *синусом* и *косинусом* и обозначаются $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$.

ТЕОРЕМА 4.3. *Существуют точно две функции $f(x)$ и $g(x)$, удовлетворяющие определению функций синус и косинус.*

Доказательство этой теоремы мы опускаем ввиду его технической сложности. Желающие могут ознакомиться с ним в любом достаточно полном учебнике по математическому анализу.

УПРАЖНЕНИЕ 4.2. Исходя из определения 4.5. доказать следующие свойства функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$:

(i) $|\sin x| \le 1$, $|\cos x| \le 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$;

(ii) $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$ $\forall x \in \mathbb{R}$;

(iii) $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$, $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ $\forall x \in \mathbb{R}$;

(iv) функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ периодичны с периодом 2π.

Отметим еще одно очень важное свойство функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ – эти функции *непрерывны*. Пока еще доказать этот факт мы не в состоянии и потому сделаем это позднее.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.6. *Тангенсом* называется функция $y = \mathrm{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Функция $y = \mathrm{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $x \neq \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, называется *котангенсом*.

Из определения следует, что функции $y = \mathrm{tg} x$ и $y = \mathrm{ctg} x$ периодические с периодом π. Все остальные свойства этих функций знакомы из школы, поэтому мы ограничимся только эскизами графиков этих функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.7. Функцию $y = f(x)$, заданную на некотором промежутке, назовем *монотонно возрастающей* (*убывающей*) на этом промежутке, если для любых чисел x_1, x_2 из промежутка таких, что $x_1 < x_2$, имеем $f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) \ge f(x_2))$. *Монотонной* на промежутке называется монотонно возрастающая или монотонно убывающая функция.

Заметим, что бывают функции, например, $f(x) = 1$ на отрезке $[0, 1]$, которые одновременно являются монотонно возрастающими и монотонно убывающими. Чтобы исключить это, проведем более строгую селекцию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.8. Функцию $y = f(x)$, заданную на некотором промежутке, назовем *строго монотонно возрастающей* (*убывающей*) на этом промежутке, если для любых чисел x_1, x_2 из промежутка таких, что $x_1 < x_2$, имеем $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$. *Строго монотонной* на промежутке называется строго монотонно возрастающая или строго монотонно убывающая функция.

Понятно, что класс строго монотонных функций содержится в классе монотонных функций.

ПРИМЕР 4.1. Функция $y = \mathrm{sgn} x$ является монотонно, но не строго монотонно возрастающей на отрезке $[-1, 1]$ функцией

График строго монотонной функции пересекается с прямыми $y = c$, где c некоторая константа, не более, чем в одной точке. Подчеркнем еще, что монотонные функции не обязательно непрерывны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.9. Пусть функция $y = f(x)$ биективно отображает промежуток I в промежуток J. Функция $x = g(y)$, заданная на J, со значениями в I называется *функцией, обратной к функции* $y = f(x)$, если для любого числа x из I $g \circ f(x) = x$.

При этом функция $y = f(x)$ является функцией, обратной к функции $x = g(y)$.

Геометрически это означает следующее. Повернем график функции $y = f(x)$ вместе с осями координат на π радиан вокруг биссектрисы угла между положительной осью Ox и положительной осью Oy, и мы сразу получим графически x как функцию от y, то есть график обратной функции $x = g(y)$.

Уже из этого геометрического построения видно, что функция $y = f(x)$, определенная на некотором промежутке I, имеет обратную функцию в том случае, когда она строго монотонна и непрерывна. Причем обратная функция будет непрерывной и строго монотонной с тем же характером монотонности, что и исходная функция. Позже мы этот факт строго докажем, а сейчас обратимся вновь к элементарным функциям.

Функция $y = \sin x$ непрерывна и строго монотонно возрастает на отрезке $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. В силу наших геометрических рассуждений она имеет на промежутке $[-1, 1]$ обратную функцию, которую обозначим через $y = \arcsin x$. Функция $y = \arcsin x$ тоже непрерывна и строго монотонно возрастает на отрезке $[-1, 1]$.

Подвергая аналогичному рассмотрению функции $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg} x$, $y = \mathrm{ctg} x$, получим обратные к ним функции $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg} x$, $y = \mathrm{arcctg} x$:

УПРАЖНЕНИЕ 4.2. Доказать, что

(i) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$;

(ii) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $\mathrm{arctg} x + \mathrm{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.10. *Гиперболическим синусом* называется функция $y = \mathrm{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (читается "хинус икс"), *гиперболическим косинусом* – функция $y = \mathrm{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (читается "кохинус икс"), *гиперболическим тангенсом* – $y = \mathrm{th} x = \dfrac{\mathrm{sh} x}{\mathrm{ch} x}$ ("танхенс икс"), *гиперболическим котангенсом* – $y = \mathrm{cth} x = \dfrac{\mathrm{ch} x}{\mathrm{sh} x}$ ("котанхенс икс").

УПРАЖНЕНИЕ 4.3. Доказать равенства:

$\mathrm{sh}(x_1 + x_2) = \mathrm{sh} x_1 \mathrm{ch} x_2 + \mathrm{ch} x_1 \mathrm{sh} x_2$,

$\mathrm{ch}(x_1 + x_2) = \mathrm{ch} x_1 \mathrm{ch} x_2 + \mathrm{sh} x_1 \mathrm{sh} x_2$,

$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$, $\mathrm{th} x \cdot \mathrm{cth} x = 1$,

$\mathrm{ch}2x = 1 + 2\mathrm{sh}^2 x$, $\mathrm{sh}2x = 2\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x$.

Гиперболические функции *непрерывны*, так как составлены из показательных функций. В силу строгой монотонности гиперболических функций на определенных промежутках они обладают обратными функциями. Определения обратных гиперболических функций мы дадим позднее, а сейчас заметим, что огромную роль в МАТАН'е играет показательная функция с основанием e. Она носит специальное название – *экспоненциальная функция* или *экспонента* – и обозначается $y = e^x$ или $y = \exp x$.

1 ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Том колебался, и вид у него был смущенный.
- Говорите же мой мальчик, не стесняйтесь. Истина всегда почтенна.
Марк Твен "Приключения Тома Сойера"

1.1 Множество действительных чисел

При определении множества действительных чисел $\mathbb{R}$ мы вновь воспользуемся аксиоматическим методом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Множество $\mathcal{X}$ называется *алгебраическим полем*, если

(i) определено аддитивное отображение (операция сложения) $+ : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ со следующими своиствами:

$\forall x, y \in \mathcal{X}$ $(x + y = y + x)$ (коммутативность);

$\forall x, y, z \in \mathcal{X}$ $((x + y) + z = x + (y + z))$ (ассоциативность);

$\exists 0 \in \mathcal{X}$ $\forall x \in \mathcal{X}$ $(x+0 = x)$ (существование нейтрального элемента (нуля));

$\forall x \in \mathcal{X}$ $\exists y \in \mathcal{X}$ $(x + y = 0)$ (существование противоположного элемента);

(ii) определено мультипликативное отображение (операция умножения) $\cdot : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ со следующими свойствами:

$\forall x, y \in \mathcal{X}$ $(x \cdot y = y \cdot x)$ (коммутативность);

$\forall x, y, z \in \mathcal{X}$ $((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$ (ассоциативность);

$\exists 1 \in \mathcal{X}$ $\forall x \in \mathcal{X}$ $(1 \cdot x = x)$ (существование нейтрального элемента (единицы));

$\forall x \in \mathcal{X}$ $(x \neq 0 \Rightarrow \exists y \in \mathcal{X}$ $(x \cdot y = 1))$ (существование обратного элемента);

(iii) упомянутые операции связаны следующим образом:

$0 \neq 1$;

$\forall x, y, z \in \mathcal{X}$ $((x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z)$ (дистрибутивность).

УПРАЖНЕНИЕ 1.1. Пусть $\mathcal{X}$ – алгебраическое поле. Доказать, что

(i) $(\exists! 0 \in \mathcal{X}) \wedge (\exists! 1 \in \mathcal{X})$;

(ii) $\forall x \in \mathcal{X}$ $(x \cdot 0 = 0)$;

(iii) $\forall x \in \mathcal{X}\ \exists! y \in \mathcal{X}\ (x + y = 0)$, $\forall x \in \mathcal{X}\ (x \neq 0)\ \exists! y \in \mathcal{X}$ $(x \cdot y = 1)$;

(iv) $\forall x \in \mathcal{X}\ (-x = (-1) \cdot x)$, где $-x$ и -1 – элементы, противоположные элементам x и 1.

По утверждению Н.Бурбаки[1] любая математическая теория изучает множества с заданными на них математическими структурами. Само понятие математической структуры фундаментально, то есть неопределяемо, однако среди них принято различать алгебраические, порядковые и топологические структуры. Определением 1.1 дается пример алгебраической структуры. Ниже мы приведем пример порядковой структуры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Множество $\mathcal{X}$ называется *линейно упорядоченным*, если

(i) на нем определено отношение частичного порядка ($\leq$);

(ii) при любых $x, y \in \mathcal{X}$ справедливо либо $x \leq y$, либо $y \leq x$.

Отношение $x \leq y$ (читается "x меньше или равно y") записывают также в виде $y \geq x$ (читается "y больше или равно x"); отношение $x \leq y$ при $x \neq y$ записывают в виде $x < y$ (читается "x меньше y") или в виде $y > x$ ("y больше x"). Отношение $x \leq y$ называют *неравенством*, а отношение $x < y$ *строгим неравенством.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Множество $\mathcal{X}$ называют *линейно упорядоченным алгебраическим полем*, если оно является одновременно алгебраическим полем и линейно упорядоченным множеством, причем

(i) $\forall x, y, z \in \mathcal{X}\ (x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z)$,

(ii) $\forall x, y \in \mathcal{X}\ (0 \leq x \wedge 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq x \cdot y)$.

(В дальнейшем знак умножения $\cdot$ часто будем опускать).

УПРАЖНЕНИЕ 1.2. Пусть $\mathcal{X}$ – линейно упорядоченное алгебраическое поле. Доказать, что

(i) $\forall x, y, z \in \mathcal{X}\ (x < y) \Rightarrow (x + y < y + z)$;

(ii) $\forall x \in \mathcal{X}\ (0 < x) \Rightarrow (-x < 0)$;

(iii) $\forall x, y \in \mathcal{X}\ (x < 0) \wedge (y < 0) \Rightarrow (xy > 0)$;

(iv) $\forall x, y \in \mathcal{X}\ (x < 0) \wedge (0 < y) \Rightarrow (xy < 0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Линейно упорядоченное множество $\mathcal{X}$ называется *полным*, если для любых двух его непустых подмножеств

[1]Никола Бурбаки – собирательный псевдоним, под которым группа французских математиков объединилась с целью формализации всей математики на основе теории множеств.

$\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$ таких, что

$$\forall x_1 \in \mathcal{X}_1 \quad \forall x_2 \in \mathcal{X}_2 \quad (x_1 \le x_2),$$

найдется элемент $y \in \mathcal{X}$ такой, что

$$x_1 \le y \le x_2.$$

Линейная упорядоченность множества $\mathcal{X}$ означает, что его можно "вытянуть в одну линию", расположив элементы "по возрастанию", то есть

$$\dots \le x \le \dots \le y \le \dots \le z \le \dots$$

Полнота упорядоченного множества означает следующее: если мы на этой "линии"выберем два непустых множества, причем одно из них лежит "левее"другого, то на этой "линии"обязательно найдется элемент, лежащий "между"этими множествами (возможно, принадлежащий одному или обоим множествам).

Аксиома, лежащая в основе определения полного линейного упорядоченного множества, называется *аксиомой полноты* и имеет исключительно большое значение в математическом анализе. В этом нам еще предстоит убедиться. А сейчас дадим, наконец,

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Полное линейно упорядоченное алгебраическое поле называется *множеством действительных чисел* и обозначается символом $\mathbb{R}$.

При аксиоматическом способе задания того или иного объекта всегда возникают по крайней мере два вопроса. Первый – не является ли множество таких объектов пустым? Это очень важный вопрос, от ответа на который зависит само существование развиваемой теории. Действительно, что можно сказать о теории, которая в качестве универсума своих множеств рассматривала бы множество страусов за Полярным кругом?! Второй вопрос – сколько различных объектов определяет данная система аксиом?

В отношении $\mathbb{R}$ на первый вопрос следует ответить отрицательно, поскольку множество всех десятичных дробей, как мы знаем из курса средней школы, полностью удовлетворяет всем аксиомам полного линейного упорядоченного алгебраического поля. Что же касается ответа на второй вопрос, то он олее пространен, ибо сначала нужно понять, что такое "различные объекты". Предположим, что некие лица A и B, пользуясь изложенной выше аксиоматикой, построят модели $\mathbb{R}_A$ и $\mathbb{R}_B$ множества действительных чисел, причем окажется, что существует отображение $f : \mathbb{R}_A \to \mathbb{R}_B$, сохраняющее операции сложения и умножения, а также отношение порядка; то есть при всех $x, y \in \mathbb{R}_A$ имеем

$$f(x +_A y) = f(x) +_B f(y),$$

$$f(x \cdot_A y) = f(x) \cdot_B f(y),$$

$$x \leq_A y \Rightarrow f(x) \leq_B f(y).$$

(Здесь $+_A, \cdot_A, \leq_A$ и $+_B, \cdot_B, \leq_B$ – арифметические операции и отношения порядка на множествах $\mathbb{R}_A$ и $\mathbb{R}_B$ соответственно). Ясно,что $\mathbb{R}_A$ и $\mathbb{R}_B$ нельзя считать совсем уже "различными", они скорее "похожи" друг на друга.

В математике слово "похожий"заменяется словом "изоморфный", а слово "различный" – словом "неизоморфный". Так вот, оказывается, что *неизоморфных множеств действительных чисел нет!*

1.2 Подмножества множества действительных чисел

Из определения множества $\mathbb{R}$ вытекает существование единицы 1. Используя ее и аксиомы множества $\mathbb{R}$, мы можем построить числа $1, 1+1 = 2, 2+1 = 3, \ldots$, каждое из которых получается прибавлением единицы к предыдущему. Полученный ряд чисел называется *множеством натуральных чисел* и обозначается символом $\mathbb{N}$. Элементы множества натуральных чисел называются *натуральными числами.*

УПРАЖНЕНИЕ 2.1. Пусть множество $\mathcal{M} \subset \mathbb{N}$. Доказать, что если $1 \in \mathcal{M}$ и $(m \in \mathcal{M}) \Rightarrow (m+1 \in \mathcal{M})$, то $\mathcal{M} = \mathbb{N}$.

Утверждение упражнения 2.1 называется *принципом математической индукции.* На этом принципе базируется один из мощнейших методов математического доказательства. Однако прежде, чем перейти к его изложению, введем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Отображение $f : \mathbb{N} \to \mathcal{X}$, где $\mathcal{X}$ – произвольное множество, называется *последовательностью.*

Поскольку любое отображение однозначно определяется своим графиком, то мы, не теряя общности, будем называть последовательностью множество

$$\{(n, x_n) : n \in \mathbb{N}, \quad x_n = f(n) \in \mathcal{X}\},$$

которое мы будем обозначать символом $\{x_n\}$.

Пусть теперь $\{A_n\}$ – последовательность высказываний.

ТЕОРЕМА 2.1 (метод математической индукции). *Если высказывание A_1 истинно, и из истинности высказывания A_m следует истинность высказывания A_{m+1}, то все высказывания последовательности $\{A_n\}$ истинны.*

$\triangleleft$ Пусть I – подмножество истинных высказываний последовательности $\{A_n\}$. $I \neq \emptyset$, поскольку $A_1 \in I$ по условию. Рассмотрим множество индексов истинных высказываний $i = \{1, m, \dots\}$. Поскольку $1 \in i$, и если $m \in i$, то $m + 1 \in i$ по условию, $i \subset \mathbb{N}$ по построению, то в силу принципа математической индукции $i = \mathbb{N}$.$\triangleright$

УПРАЖНЕНИЕ 2.2. Показать, что сумма и произведение натуральных чисел являются натуральными числами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Объединение множества натуральных чисел, множества чисел, противоположных натуральным и нуля называется *множеством целых чисел* и обозначается символом $\mathbb{Z}$. Числа вида $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, а $n \in \mathbb{N}$, называются *рациональными*. Множество рациональных чисел обозначается символом $\mathbb{Q}$. Все действительные числа, не являющиеся рациональными, называются *иррациональными*.

Правила сложения и умножения дробей (а именно они являются элементами $\mathbb{Q}$) убеждают нас, что $\mathbb{Q}$ – алгебраическое поле. Поскольку $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ и $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$, то $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ – неизоморфные алгебраические поля.

Хорошо известно, что любое действительное число можно представить бесконечной десятичной дробью (рациональное число – конечной либо бесконечной периодической дробью, а иррациональное – бесконечной апериодической дробью). Возможность такого представления поможет нам ответить на следующий интересный вопрос: а каких чисел "больше" – натуральных, целых, рациональных или иррациональных? Слово "больше"мы взяли в кавычки потому, что все множества $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ и $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ бесконечны и сравнить "количества"их элементов простым подсчетом не удастся. Тем не менее существует понятие, позволяющее сравнивать бесконечные множества.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Два множества $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ называются *равномощными* (или *имеющими одинаковую мощность*), если существует биективное отображение $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. Бесконечное множество $\mathcal{X}$ называется *счетным*, если оно равномощно множеству $\mathbb{N}$, и *несчетным* в противном случае.

Грубо говоря, счетными называются те множества, все элементы которого можно "перенумеровать".

ТЕОРЕМА 2.2. *Множество $\mathbb{Q}$ счетно.*

$\triangleleft$ Процедура подсчета положительных рациональных чисел указана ниже (повторяющиеся числа отбрасываем):

Эти числа можно считать, скажем, с помощью только четных натуральных чисел, оставив нечетные для отрицательных рациональных чисел и нуля. $\triangleright$

ТЕОРЕМА 2.3. *Множество $\mathbb{R}$ несчетно.*

$\triangleleft$ Достаточно доказать несчетность какого-либо подмножества $\mathbb{R}$. Для этой цели выберем множество $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ и предположим, что оно счетно. Поскольку все элементы множества представимы в виде бесконечных десятичных дробей, то ввиду счетности запишем это множество в порядке нумерации:

$$\alpha = 0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots, \quad \beta = 0,\beta_1\beta_2\beta_3\ldots, \quad \gamma = 0,\gamma_1\gamma_2\gamma_3\ldots, \quad \ldots$$

где α – первое число, β – второе число, γ – третье число и т. д.

Составим теперь число $\varepsilon = 0,\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\ldots$ следующим образом: $\varepsilon_i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$, $i \in \mathbb{N}$, но $\varepsilon_1 \neq \alpha_1$, $\varepsilon_2 \neq \beta_2$, $\varepsilon_3 \neq \gamma_3$ и т. д. Очевидно, $0 < \varepsilon < 1$, но ε нами не сосчитано потому, что $\varepsilon \neq \alpha$, так как $\varepsilon_1 \neq \alpha_1$; $\varepsilon \neq \beta$, так как $\varepsilon_2 \neq \alpha_2$; $\varepsilon \neq \gamma$, так как $\varepsilon_3 \neq \alpha_3$ и т. д. Другими словами, ε не содержится во множестве $\{0 < x < 1\}$. Противоречие. $\triangleright$

1.3 Принцип точной верхней грани, аксиома Архимеда и геометрическая интерпретация множества действительных чисел

Прежде всего мы отметим, что *принципами* мы будем называть те утверждения, которые эквивалентны одной или нескольким аксиомам.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Множество $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху* (*снизу*), если

$$\exists c \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathcal{X} \quad (x \leq c) \quad (\exists c \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathcal{X} \quad (x \geq c)).$$

Число c называется *верхней* (*нижней*) *гранью* множества $\mathcal{X}$. Множество $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$, ограниченное сверху и снизу, называется *ограниченным.*

Как нетрудно увидеть, множества $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : \quad x > 0\}$ ограничены снизу, а множество отрицательных целых чисел ограничено сверху. Множество $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R} : \quad 0 \leq x < 1\}$ ограничено сверху и снизу, то есть ограничено.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Элемент $a \in \mathcal{X}$ множества $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ называется *наибольшим* или *максимальным* (*наименьшим* или *минимальным*), если

$$(a \in \mathcal{X}) \wedge (\forall x \in \mathcal{X} \quad (x \leq a)) \quad ((a \in \mathcal{X}) \wedge (\forall x \in \mathcal{X} \quad (x \geq a))).$$

Максимальный (минимальный) элемент множества обозначается символом

$$a = \max \mathcal{X} \quad (a = \min \mathcal{X}).$$

Заметим, что множество $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R} : \quad 0 \leq x < 1\}$ имеет минимальный ($\min \mathcal{A} = 0$), но не имеет максимального элемента.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Наименьшая верхняя грань множества $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ называется *точной верхней гранью* и обозначается символом

$$\sup \mathcal{X} = \min\{c \in \mathbb{R} : \quad \forall x \in \mathcal{X} \quad (x \leq c)\}$$

(читается "супремум икс"). Наибольшая нижняя грань множества $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ называется *точной нижней гранью* и обозначается

$$\inf \mathcal{X} = \max\{c \in \mathbb{R} : \quad \forall x \in \mathcal{X} \quad (x \geq c)\}$$

("инфимум икс").

ТЕОРЕМА 3.1 (принцип точной верхней грани). *Для любого непустого ограниченного сверху множества* $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ *существует единственная точная верхняя грань.*

$\triangleleft$ Пусть $\mathcal{Y} = \{y \in \mathbb{R} : \quad \forall x \in \mathcal{X} \quad (x \leq y)\}$ – множество верхних граней множества $\mathcal{X}$. По определению $\sup \mathcal{X} = \min \mathcal{Y}$. Обозначим $\sup \mathcal{X} = s$ и допустим, что существует еще $s' = \min \mathcal{Y}$. Тогда с одной стороны $s \leq s'$, а с другой – $s' \leq s$. Стало быть, $s = s'$. Итак, единственность $\sup \mathcal{X}$ доказана. Докажем теперь существование.

Поскольку множество $\mathcal{X} \neq \emptyset$ и ограничено сверху, то множество $\mathcal{Y} \neq \emptyset$. Так как

$$\forall x \in \mathcal{X} \quad \forall y \in \mathcal{Y} \quad (x \leq y),$$

то отсюда по аксиоме полноты следует существование числа $s \in \mathbb{R}$ такого, что

$$\forall x \in \mathcal{X} \quad \forall y \in \mathcal{Y} \quad (x \leq s \leq y).$$

Другими словами, s – верхняя грань множества $\mathcal{X}$, поэтому $s \in \mathcal{Y}$. С другой стороны, s – нижняя грань множества $\mathcal{Y}$, поэтому $s = \min \mathcal{Y}$. $\triangleright$

УПРАЖНЕНИЕ 3.1. Сформулировать и доказать принцип точной нижней грани.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *В любом непустом ограниченном сверху множестве* $\mathcal{X} \subset \mathbb{N}$ *имеется максимальный элемент.*

$\triangleleft$ По принципу точной верхней грани

$$\exists! \sup \mathcal{X} = s \in \mathbb{R}.$$

По определению точной верхней грани

$$\exists n \in \mathcal{X} \quad (s - 1 < n \leq s).$$

Тогда $n = \max \mathcal{X}$, поскольку все натуральные числа, которые больше n, не меньше $n + 1$, а $n + 1 > s$. То есть натуральные числа, большие n, не входят во множество $\mathcal{X}$. $\triangleright$

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Множество натуральных чисел неограничено сверху.*

$\triangleleft$ В противном случае существовало бы максимальное натуральное число. Но $n < n + 1$. $\triangleright$

УПРАЖНЕНИЕ 3.2. Доказать, что в любом непустом ограниченном сверху множестве $\mathcal{X} \subset \mathbb{Z}$ имеется максимальный элемент.

УПРАЖНЕНИЕ 3.3. Доказать, что в любом непустом ограниченном снизу множестве $\mathcal{X} \subset \mathbb{Z}$ имеется минимальный элемент.

УПРАЖНЕНИЕ 3.4. Доказать, что множество $\mathbb{Z}$ не ограничено ни сверху ни снизу.

ТЕОРЕМА 3.2 (принцип Архимеда [1]). *Пусть $h \in \mathbb{R}_+$ – произвольное число. Тогда для любого числа $x \in \mathbb{R}$ существует единственное число $k \in \mathbb{Z}$ такое, что $(k-1)h \leq x < kh$.*

$\lhd$ Поскольку множество $\mathbb{Z}$ неограничено сверху, то множество

$$\{n \in \mathbb{Z} : \quad x/h < n\} \quad -$$

непустое ограниченное снизу подмножество множества целых чисел. Тогда в нем имеется минимальный элемент k, то есть

$$k - 1 \leq x/h < k.$$

Единственность минимального элемента также вытекает из принципа точной нижней грани. $\rhd$

Если взять $h = 1$, то из принципа Архимеда вытекает, что для любого числа $x \in \mathbb{R}$ существует единственное число $k \in \mathbb{Z}$ такое, что

$$k \leq x < k + 1.$$

Это число k обозначается $[x]$ и называется *целой частью* числа x. Величина $\{x\} = x - [x]$ называется *дробной частью* числа x.

По отношению к действительным числам часто используется геометрический язык, связанный с тем обстоятельством, что можно построить биективное отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{L}$, где $\mathbb{L}$ – некоторая прямая линия. Это отображение, называемое *геометрической интерпретацией* множества $\mathbb{R}$, строится следующим образом. Пусть $\mathbb{L}$ – произвольная прямая линия. Выберем на ней две произвольные точки: левую и правую. Левой поставим в соответствие нуль, а правой – единицу. Отрезок прямой, заключенный между нулем и единицей, назовем *единичным отрезком.* Совмещая правый конец единичного отрезка с левым концом отрезка I, конгруэнтного

[1] Архимед (ок. 287-212 г. до н.э.) – древнегреческий математик и механик. В математике создал методы вычисления площадей и объемов и был близок к открытию интегрального исчисления.

единичному, мы сопоставим правому концу отрезка I число 2. Повторяя эту операцию, мы укажем все точки прямой $\mathbb{L}$, соответствующие натуральным числам. Взяв точки, симметричные точкам с натуральными числами относительно точки 0, мы получим точки, соответствующие элементам $\mathbb{Z}$.

Умея удваивать, утраивать,... единичный отрезок, по теореме Фалеса[1] его же можно разбить на соответствующее число (n) конгруэнтных отрезков. Беря тот из них, левый конец которого совмещен с точкой 0, мы получим точку (правый конец отрезка), которой сопоставим число $1/n$.

Действуя подобным образом, найдем все точки, поставленные в соответствие элементам $\mathbb{Q}$.

Однако на $\mathbb{L}$ останутся незанятые рациональными числами точки. (Скажем, правый конец отрезка, конгруэнтный диагонали единичного квадрата, не может быть совмещен ни с каким рациональным числом, если, разумеется, его левый конец совмещен с нулем). Такая точка производит разбиение (сечение) множества $\mathbb{Q}$ на два непустых подмножества $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, причем $\forall x \in \mathcal{X}\ \forall y \in \mathcal{Y}\ (x \leq y)$. По аксиоме полноты $\exists c \in \mathbb{R}$, разделяющее множества $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$. Поскольку $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y} = \mathbb{Q}$, то $s = \sup \mathcal{X} = \inf \mathcal{Y} = i$, ибо в противном случае $s < i$ и нашлось бы рациональное число, лежащее между s и i, но не лежащее ни в $\mathcal{X}$, ни в $\mathcal{Y}$. Поэтому данной точке можно поставить в соответствие число $c \in \mathbb{R}$.

Мы не будем вдаваться в подробности построения геометрической интерпретации множества действительных чисел, поскольку саму геометрическую интерпретацию мы будем использовать исключительно для наглядности. Введем следующие обозначения для числовых множеств:

$$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} : \quad a < x < b\} \quad \text{- интервал} \quad ab;$$

$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : \quad a \leq x \leq b\} \quad \text{- отрезок} \quad ab;$$

$$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} : \quad a < x \leq b\} \quad \text{- полуинтервал с правым концом;}$$

$$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} : \quad a \leq x < b\} \quad \text{- полуинтервал с левым концом.}$$

[1] Фалес Милетский (ок. 625-547 г. до н.э.) – древнегреческий математик, астроном и философ

Интервалы, полуинтервалы и отрезки называются *промежутками.* Величина $b-a$ называется *длиной* промежутка ab.

Множества

$$(a,+\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\};$$

$$[a,+\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\};$$

$$(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\};$$

$$(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\};$$

называются *неограниченными промежутками.* В соответствии с таким употреблением символов $+\infty$ (читается "плюс бесконечность") и $-\infty$ (читается "минус бесконечность") для обозначения неограниченности числового множества $\mathcal{X}$ сверху (снизу) будем писать $\sup \mathcal{X} = +\infty$ ($\inf \mathcal{X} = -\infty$).

Интервал, содержащий точку $x \in \mathbb{R}$, будем называть *окрестностью* этой точки.

При $\delta > 0$ интервал $(x-\delta, x+\delta)$ называется *δ-окрестностью* точки $x \in \mathbb{R}$. Его длина 2δ.

Расстоянием между точками $x, y \in \mathbb{R}$ называется величина $|x-y|$, где $|z|$ – *модуль* или *абсолютная величина*, определяется соотношением:

$$|z| = \begin{cases} z \quad \text{при} \quad z > 0; \\ 0 \quad \text{при} \quad z = 0; \\ -z \quad \text{при} \quad z < 0. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 3.1. $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |x+y| \leq |x| + |y|$, *причем равенство имеет место точно тогда, когда оба числа неотрицательны или оба неположительны.*

$\triangleleft$ Пусть $x \leq 0$ и $y \leq 0$. Тогда $|x+y| = -(x+y) = -x-y = |x|+|y|$. Имеет место равенство.

Аналогично рассматривается случай $x \geq 0$ и $y \geq 0$.

Пусть $x < 0 < y$. Тогда либо $x < x+y \leq 0$, либо $0 < x+y < y$. В первом случае $|x+y| < |x|$, а во втором $|x+y| < |y|$. $\triangleright$

Заметим еще, что отношение $\leq$ $(\geq)$ на прямой читается "левее"("правее"), то есть $x \leq y$ означает "точка икс лежит левее точки игрек". Таким образом введенное отношение порядка на $\mathbb{L}$ проясняет термин "линейная упорядоченность".

Аксиома полноты на геометрическом языке означает, что на прямой $\mathbb{L}$ нет "дыр", разбивающих ее на два не имеющих общих точек куска (такое разбиение может осуществляться, к примеру, некоторой точкой прямой $\mathbb{L}$).

1.4 Основные принципы теории действительных чисел

Все приведенные ниже утверждения не просто вытекают из аксиомы полноты: более того, каждое из них может быть положено в основу теории действительных чисел вместо этой аксиомы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Последовательность $\{\mathcal{X}_n\}$ множеств называется *последовательностью вложенных множеств*, если $\forall n \in \mathbb{N}$ $(\mathcal{X}_n \supset \mathcal{X}_{n+1})$, то есть

$$\mathcal{X}_1 \supset \mathcal{X}_2 \supset \dots \supset \mathcal{X}_n \supset \dots$$

ТЕОРЕМА 4.1 (принцип вложенных отрезков или принцип Коши - Кантора). *Для любой последовательности $\{I_n\}$ вложенных отрезков существует точка $c \in \mathbb{R}$ такая, что $\forall n \in \mathbb{N}$ $(c \in I_n)$. Если, кроме того, известно, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$ $(|I_n| < \varepsilon)$, то c – единственная общая точка всех отрезков.*

$\triangleleft$ Заметим, что для любых отрезков $I_n = [a_n, b_n]$ и $I_m = [a_m, b_m]$ имеет место неравенство $a_n \leq b_m$. Пусть нет, то есть $b_m < a_n \Rightarrow a_m \leq b_m < a_n \leq b_n$, то есть отрезки I_n и I_m не имели бы общих точек, в то время как один из них должен содержать другой.

Таким образом, для числовых множеств $\mathcal{A} = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ и $\mathcal{B} = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ выполнены условия аксиомы полноты, в силу которой $\exists c \in \mathbb{R}$ $\forall a_n \in \mathcal{A}$ $\forall b_n \in \mathcal{B}$ $(a_n < c < b_n)$ и, в частности, $a_n < c < b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Но это означает, что точка c принадлежит каждому отрезку I_n.

Пусть теперь c_1 и c_2 – две точки, обладающие этим свойством. Если c_1 и c_2 различны, скажем $c_1 < c_2$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем $a_n \leq c_1 < c_2 \leq b_n$, откуда $0 < c_2 - c_1 \leq b_n - a_n = |I_n|$. Таким образом, длина отрезка не может быть меньше фиксированной положительной величины. Значит, если в последовательности есть отрезки сколь угодно малой длины, то общая точка у них единственная. $\triangleright$

Внимательный анализ доказательства показывает, что в нем в явном виде использованы все условия утверждения за исключением требования именно *отрезков*. Поэтому покажем, что для последовательности вложенных, скажем, полуинтервалов утверждение неверно.

КОНТРПРИМЕР 4.1. Пусть $\{I_n\}$ – последовательность полуинтервалов вида $I_n = (0, 1/n]$. Поскольку $1/n > 1/(n+1)$, то $I_n \supset I_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то есть мы располагаем последовательностью вложенных полуинтервалов. Покажем, что у последовательности нет общей точки. Действительно, если бы существовала точка $c \in I_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, то это означало бы, что $0 < c < 1/n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Однако, если мы возьмем $N > c^{-1}$, $N \in \mathbb{N}$, то для всех $n \geq N$ имеем $c > 1/n$, то есть $c \notin I_n$, что противоречит предположению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Система множеств $\mathcal{S} = \{\mathcal{X}_\alpha : \mathcal{X}_\alpha \subset U, \quad \alpha \in I\}$ (I – некоторое множество индексов) называется *покрытием* множества $\mathcal{Y}$, если $\mathcal{Y} \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} \mathcal{X}_\alpha$, (то есть любой элемент $y \in \mathcal{Y}$ содержится по крайней мере в одном из множеств $\mathcal{X}_\alpha$ системы $\mathcal{S}$). Покрытие будем называть *открытым*, если оно состоит из открытых множеств, и *конечным*, если множество индексов I конечно. Подмножество покрытия $\mathcal{S}$, само являющееся покрытием того же множества, будем называть *подпокрытием*.

ТЕОРЕМА 4.2 (принцип конечного покрытия или принцип Бореля -Лебега[1]). *Любое открытое покрытие отрезка содержит конечное подпокрытие.*

$\triangleleft$ Пусть $\mathcal{S} = \{\mathcal{X}_\alpha\}$ – система интервалов $\mathcal{X}_\alpha$, покрывающая отрезок $[a, b] = I_1$. Если бы отрезок не допускал покрытия конечным подпокрытием, то, поделив его пополам, мы получили бы, что по крайней мере одна из его половинок (назовем ее I_2) тоже не допускает конечного покрытия. С отрезком I_2 проделаем ту же операцию деления пополам, получим отрезок I_3 и т. д.

Таким образом, возникает последовательность $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ вложенных отрезков, не допускающих конечного покрытия интервалами системы $\mathcal{S}$. Поскольку длина отрезка, полученного на n-ом шаге, равна $|I_n| = |I_1| \cdot 2^{1-n}$, то в последовательности есть отрезки сколь угодно малой длины. По принципу вложенных отрезков $\exists c \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N} \ (c \in I_n)$. Поскольку $c \in I_1$, то найдется интервал

[1]Феликс Эдуар Жюстен Эмиль Борель (1871-1956), Анри Леон Лебег (1875-1942) – французские математики, специалисты в области теории функций.

$(a_\alpha, b_\alpha) \in \mathcal{S}$ такой, что $c \in (a_\alpha, b_\alpha)$. Пусть $\varepsilon = \min\{c - a_\alpha, b_\alpha - c\} > 0$. Возьмем отрезок I_n такой, что $|I_n| < \varepsilon$. Так как $c \in I_n$ и $|I_n| < \varepsilon$, то $I_n \subset (a_\alpha, b_\alpha)$. Но это противоречит тому, что отрезок I_n нельзя покрыть конечной подсистемой $\mathcal{S}$. $\triangleright$

Требование, чтобы система $\mathcal{S}$ была открытой, то есть состояла из *интервалов*, существенно. Рассмотрим

КОНТРПРИМЕР 4.2. Пусть $I = (0, 1)$ – интервал, а $\mathcal{S}$ – система отрезков вида $[1/n, 1]$. Покажем, что $\mathcal{S}$ покрывает I. Действительно, пусть $c \in I$ (то есть $0 < c < 1$). Тогда $\exists n \in \mathbb{N}$ $c^{-1} < n$, откуда $1/n < c$, то есть $c \in [1/n, 1] \in \mathcal{S}$. Теперь покажем, что из $\mathcal{S}$ нельзя выбрать конечного покрытия. Допустим противное, что существуют числа $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ такие, что $\bigcup\limits_{1 \le i \le k} [1/n_i, 1] \supset I$. Пусть $n_l = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$. Очевидно, $[1/n_i, 1] \subset [1/n_l, 1]$, $i = 1, \ldots, k$. Возьмем $0 < c < n_l^{-1}$. Ясно, что $c \in I$, но $c \notin \bigcup\limits_{1 \le i \le k} [1/n_i, 1]$.

УПРАЖНЕНИЕ 4.1. Рассмотреть случаи, когда

– из системы отрезков, покрывающей отрезок, нельзя выбрать конечной подсистемы;

– из покрытия интервала интервалами нельзя выбрать конечного подпокрытия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Точка $p \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой* множества $\mathcal{X} \in \mathbb{R}$, если любая окрестность этой точки содержит бесконечное подмножество множества $\mathcal{X}$.

Это определение, очевидно, равносильно тому, что в любой окрестности точки p есть по крайней мере одна точка множества $\mathcal{X}$, отличная от p.

Приведем примеры предельных точек.

ПРИМЕР 4.1. $\mathcal{X} = \{1/n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$. Предельной для $\mathcal{X}$ является только точка 0.

ПРИМЕР 4.2. $\mathcal{X} = (a, b)$. Предельной для $\mathcal{X}$ является каждая точка отрезка $[a, b]$, и других предельных точек нет.

ПРИМЕР 4.3. $\mathcal{X} = \mathbb{Q}$. Предельной для $\mathcal{X}$ является любая точка множества $\mathbb{R}$, поскольку в любом интервале вещественных чисел имеются рациональные числа.

ТЕОРЕМА 4.3 (принцип предельной точки или принцип Больцано[1] - Вейерштрасса). *Всякое бесконечное ограниченное числовое множество имеет по крайней мере одну предельную точку.*

$\triangleleft$ Пусть $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ и $\mathcal{X}$ – ограничено. Это значит, что $\mathcal{X} \subset [a, b] = I$. Покажем, что по крайней мере одна из точек отрезка I является предельной для $\mathcal{X}$.

Предположим противное, то есть $\forall x \in I$ существует окрестность $_x$ такая, что $O_x \cap \mathcal{X} = \emptyset$, либо $O_x \cap \mathcal{X}$ содержит конечное число точек. Совокупность таких окрестностей O_x, построенных для любого $x \in I$, образует покрытие $\{O_x\}_{x \in \mathcal{X}}$ отрезка I. По принципу Бореля - Лебега из этого покрытия извлечем конечную подсистему $\{O_{x_1}, O_{x_2}, \ldots, O_{x_n}\}$, покрывающую I и, следовательно, $\mathcal{X}$. Однако в каждом интервале O_{x_i} содержится только конечное число точек множества $\mathcal{X}$, поэтому $\mathcal{X}$ – конечное множество. Полученное противоречие доказывает утверждение. $\triangleright$

[1]Бернард Больцано (1781-1848) – чешский математик, философ, теолог.

2 ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

Мне вся эта семья нравилась, и покойники и живые, и я вовсе не хотел ни с кем из них ссориться.
Марк Твен "Приключения Гекльберри Финна"

2.1 Определение предела последовательности и его свойства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Отображение $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *называется числовой последовательностью.* Числовая последовательность однозначно определяется множеством $\{x_n\} := \{x_n \in \mathbb{R} : x_n = f(n), n \in \mathbb{N}\}$. Элементы множества $\{x_n\}$ называются *членами числовой последовательности.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Число $x \in \mathbb{R}$ называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $N \in \mathbb{N}$ такое, что при $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - x| < \varepsilon$

$$(\lim_{n\to\infty} x_n = x) := (\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad (|x - x_n| < \varepsilon)).$$

Это же самое выражение другими символами можно выразить так: $x_n \to x$ при $n \to \infty$ (читается "последовательность икс энное стремится к икс при эн стремящемся к бесконечности"). Последовательность $\{x_n\}$ *имеет своим пределом* ∞ (читается: "бесконечность"), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $n > N$ выполняется неравенство $|x_n| > \varepsilon$.

$$(\lim_{n\to\infty} x_n = \infty) := (\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad (|x_n| > \varepsilon)).$$

Последовательности, имеющие своим пределом число, называются *сходящимися*; последовательности, имеющие своим пределом бесконечность, называются *сходящимися к бесконечности*; все остальные последовательности называются *расходящимися.*

УПРАЖНЕНИЕ 1.1. Взять отрицания определений сходящейся последовательности и последовательности, сходящейся к бесконечности.

Приведем примеры сходящихся, сходящихся к бесконечности и расходящихся последовательностей.

ПРИМЕР 1.1. Последовательность $\{\frac{1}{n}\}$ сходится к нулю, поскольку $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ (именно, $N = [\varepsilon^{-1}] + 1$) $\forall n > N$ имеем

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} = \frac{1}{[\varepsilon^{-1}] + 1} < \varepsilon,$$

поскольку $1 + [\varepsilon^{-1}] > \varepsilon^{-1}$. Итак,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

. Последовательность $\{\frac{1}{q^n}\}$ тоже сходится к нулю при $|q| > 1$. Положим $|q| = 1 + \delta$, где $\delta > 0$. Используя бином Ньютона, получим $|q|^N = 1 + N\delta + \cdots > N\delta$. Отсюда $\frac{1}{|q|^N} < \frac{1}{N\delta}$. Кроме того, $\forall n > N$ имеем $|q|^n > |q|^N$, поэтому $\frac{1}{|q|^n} < \frac{1}{|q|^N}$. Окончательно: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ (именно, $N = \left[\frac{1}{\varepsilon\delta}\right] + 1$) $\forall n > N$ имеем:

$$\left|\frac{1}{q^n} - 0\right| = \frac{1}{|q|^n} < \frac{1}{|q|^N} < \frac{1}{N\delta} < \varepsilon.$$

Итак,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q^n} = 0.$$

.

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty,$$

поскольку $\varepsilon > 0\ \exists N$ (именно, $N = [\varepsilon] + 1$) имеем $|n| = n > N > \varepsilon$.

О существовании расходящихся последовательностей говорит следующий

ПРИМЕР 1.4. Рассмотрим последовательность $\{(-1)^n\}$ и покажем сначала, что она не сходится к бесконечности. Действительно, если взять $\varepsilon = 3/2$, то $\forall N \in \mathbb{N}\ \exists n > N$ (именно: $n = N + 1$), для которого $|(-1)^n| = 1 < \frac{3}{2}$. Теперь покажем, что последовательность не сходится ни к какому конечному числу x. Пусть $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \pm 1$ выбрано произвольно. Возьмем $\varepsilon \leq \min\{|x-1|, |x+1|\}$. Тогда $\forall N \in \mathbb{N}$ $\exists n > N$ (именно, $n = N+1$), для которого $|x_n - x| = |(-1)^n - x| \geq \varepsilon$. Если $x = 1$ ($x = -1$), то при всех нечетных (четных) n $|x_n - x| = 2 \geq 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если $\exists c > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ (|x_n| < c)$. В противном случае последовательность называется *неограниченной*.

УПРАЖНЕНИЕ 1.2. Привести примеры ограниченной последовательности.

СВОЙСТВА предела последовательности:

(i) *Любая окрестность предела (конечного или бесконечного) последовательности содержит все члены последовательности, за исключением конечного их числа.*

(ii) *Последовательность не может иметь двух различных пределов.*

(iii) *Сходящаяся последовательность ограничена.*

$\triangleleft$ Свойство (i) следует непосредственно из определения предела, если в качестве окрестности ∞ брать любое множество $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$, где $a < b$.

Свойство (ii) докажем от противного. Пусть $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $(x_1 \neq x_2) \wedge (\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_1) \wedge (\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_2)$. Выберем $\varepsilon < \frac{1}{2}|x_1 - x_2|$. Тогда по определению предела имеем $(|x_n - x_1| < \varepsilon) \wedge (|x_n - x_2| < \varepsilon)$. Поэтому

$$|x_n - x_1| + |x_n - x_2| < |x_1 - x_2|.$$

С другой стороны по свойству модуля

$$|x_1 - x_2| \leq |x_n - x_1| + |x_n - x_2|.$$

Окончательно

$$|x_1 - x_2| < |x_1 - x_2|.$$

Полученное противоречие доказывает свойство (ii). Если один из пределов бесконечен, то доказательство аналогично.

Свойство (iii). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Возьмем $\varepsilon = 1$ и найдем число $N \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n > N$ имеем $|x_n - x| < 1$. Откуда $|x_n| < |x| + 1$ $\forall n > N$. Значит, если взять $M > \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|, |x| + 1\}$, то получим $\forall n \in \mathbb{N}$ $(|x_n| < M)$. $\triangleright$

2.2 Предел последовательности, арифметические операции и неравенства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – две последовательности, то их *суммой, произведением* и *частным* называются соответственно последовательности

$$\{x_n + y_n\}, \quad \{x_n y_n\}, \quad \{x_n/y_n\},$$

Частное определено лишь при $y_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.

ЛЕММА 2.1. *Пусть* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *– последовательности. Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, *то*

(i) $\forall c \in \mathbb{R}\ (\lim\limits_{n\to\infty} cx_n = cx)$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - x)(y_n - y) = 0$.

$\triangleleft$ (i) Для данного $\varepsilon > 0$ и $c \neq 0$ существует N такое, что при $n > N$ $|x_n - x| < \varepsilon/|c|$. Тогда $|cx_n - cx| < \varepsilon$. Для $c = 0$ (i) очевидно.

(ii) Для данного $\varepsilon > 0$ существуют $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ такие, что $|x_n - x| < \sqrt{\varepsilon}$ при $n > N_1$, $|y_n - y| < \sqrt{\varepsilon}$ при $n > N_2$. Тогда при $n > \max\{N_1, N_2\}$ имеем $|(x_n - x)(y_n - y) - 0| = |x_n - x| \cdot |y_n - y| < \varepsilon$. $\triangleright$

ЛЕММА 2.2. *Пусть* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *– последовательности. Если* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, $y_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ *и* $y \neq 0$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} 1/y_n = 1/y$.

$\triangleleft$ Положим $\varepsilon = |y|/2$ и выберем $N_1 \in \mathbb{N}$ так, что при $n > N_1$ $|y_n - y| < \varepsilon$. Отсюда получаем, что при $n > N_1$

$$(|y_n - y| < |y|/2) \Leftrightarrow (y - |y|/2 < y_n < y + |y|/2).$$

Если $y \geq 0$, то из левого неравенства получаем $y_n > y/2$. Если $y < 0$, то из правого неравенства получаем $y_n < y/2$. В обоих случаях $|y_n| > |y|/2$. Теперь при произвольном $\varepsilon > 0$ выберем $N_2 \in \mathbb{N}$, $N_2 > N_1$ такое, что при $n > N_2$ $|y_n - y| < (y^2\varepsilon)/2$. Отсюда при $n > N_2$ имеем:

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|y_n - y|}{|y_n y|} < |y_n - y| \cdot \frac{2}{y^2} < \varepsilon. \quad \triangleright$$

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *– последовательности. Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, *то*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = xy$,

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n/y_n = x/y$, *если* $y_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ *и* $y \neq 0$.

$\lhd$ (i) Пусть задано $\varepsilon > 0$. $(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x) \Rightarrow \exists N_1 \in \mathbb{N}\ \forall n > N_1$ $|x_n - x| < \varepsilon/2$, $(\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y) \Rightarrow \exists N_2 \in \mathbb{N}\ \forall n > N_2\ |y_n - y| < \varepsilon/2$. Отсюда $\forall n > \max\{N_1, N_2\}\ \varepsilon > |y_n - y| + |x_n - x| \geq |(y_n - y) + (x_n - x)| = |(x_n + y_n) - (x + y)|$.

(ii) Для доказательства утверждения (ii) воспользуемся тождеством:

$$x_n y_n - xy = (x_n - x)(y_n - y) + x(y_n - y) + (x_n - x)y.$$

Перейдем к пределу в левой и правой частях равенства, используя лемму 2.1 и утверждение (i). Получим требуемое.

Утверждение (iii) следует из леммы 2.2 и утверждения (ii) этой теоремы. $\rhd$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Данное утверждение остается в силе и в случае, когда один из пределов бесконечен, если определить

$$x + \infty = \infty; \quad x \cdot \infty = \infty, \quad x \neq 0; \frac{\infty}{x} = \infty; \quad \frac{x}{\infty} = 0.$$

ТЕОРЕМА 2.2. (i) *Пусть* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *– две последовательности, причем* $\exists x, y \in \mathbb{R}$ $(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x) \wedge (\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y)$. *Если* $x < y$, *то* $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ (x_n < y_n)$.

(ii) Пусть $\{x_n\}, \{y_n\}$ *и* $\{z_n\}$ *таковы, что* $\forall n \in \mathbb{N}\ (x_n \leq y_n \leq z_n)$. *Тогда, если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, *то и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

$\lhd$ (i) Возьмем $z \in \mathbb{R}$ такое, что $x < z < y$. По определению предела $\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ такие, что $\forall n > N_1\ |x_n - x| < z - x$, а $\forall n > N_2$ $|y_n - y| < y - z$. Тогда $\forall n > \max\{N_1, N_2\}$ имеем $x_n < x + z - x = z = y - (y - z) < y_n$.

(ii) По $\varepsilon > 0$ найдем $N_1, N_2 \in \mathbb{N}\ \forall n > N_1\ (a - \varepsilon < x_n)$, $\forall n > N_2$ $(z_n < a + \varepsilon)$. Тогда $\forall n > \max\{N_1, N_2\}$ имеем $a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon$, то есть $|y_n - a| < \varepsilon$. $\rhd$

Утверждение (ii) теоремы 2.2 часто называют "теоремой о двух милиционерах".

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. *Если* $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n > N$

(i) $x_n \leq y_n$, *то* $x \leq y$;

(ii) $x_n < y_n$, *то* $x \leq y$;

(iii) $x_n \le y$, *то* $x \le y$;

(iv) $x_n < y$, *то* $x \le y$.

$\lhd$ Утверждения (i) и (ii) доказываются от противного. Действительно, пусть $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ (x_n \le y_n \vee x_n < y_n)$ и $x > y$ – противоречие утверждению (i) теоремы 2.2.

(iii) и (iv) есть частные случаи (i) и (ii). $\rhd$

Рассмотрим несколько часто встречающихся последовательностей.

ПРИМЕР 2.1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$ при $p > 0$. Как и в случае $p = 1$ возьмем $N = \left[\varepsilon^{-1/p}\right] + 1$. Тогда при $n > N$ имеем $\left|\frac{1}{n^p} - 0\right| = \frac{1}{n^p} < \varepsilon$.

ПРИМЕР 2.2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$, $p > 0$. Если $p > 1$, положим $x_n = \sqrt[n]{p} - 1$. Тогда $x_n > 0$ и в силу бинома Ньютона $1 + nx_n \le (1 + x_n)^n = p$. Откуда $0 < x_n < \frac{p-1}{n}$. Применяя "теорему о двух милиционерах"получаем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Если $p = 1$, утверждение тривиально, если $0 < p < 1$, то рассмотрим $q = 1/p$. Для q получим

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{p}} = (\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p})^{-1}.$$

ПРИМЕР 2.3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Положим $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Тогда $x_n > 0$ и по биному Ньютона имеем

$$n = (1 + x_n)^n = 1 + nx_n + \frac{n(n-1)}{2}x_n^2 + \cdots \ge \frac{n(n-1)}{2}x_n^2.$$

Значит, при $n \ge 2$

$$0 \le x_n \le \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Осталось воспользоваться теоремой 2.2.

2.3 Критерии Коши и Вейерштрасса. Число e

Вся развиваемая до сих пор теория имеет один существенный недостаток. Именно: для того, чтобы установить сходимость некоторой последовательности $\{x_n\}$, необходимо располагать какой-то информацией о ее пределе x. Скажем, $\{x_n\}$ есть сумма или произведение сходящихся последовательностей; или $\{x_n\}$ заключена между сходящимися последовательностями. Критерий Коши позволяет установить сходимость (или расходимость) последовательности $\{x_n\}$, не располагая никакой информацией о ее пределе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Последовательность $\{x_n\}$ называется *фундаментальной* (или *последовательностью Коши*), если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \forall m > N \quad |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

ТЕОРЕМА 3.1 (Критерий Коши). *Последовательность сходится точно тогда, когда она фундаментальна.*

$\lhd$ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. По данному $\varepsilon > 0$ найдем $N \in \mathbb{N}$ так, чтобы при $n > N$ $|x_n - x| < \varepsilon/2$. Если теперь $m, n > N$, то имеем

$$|x_m - x_n| \le |x_m - x| + |x_n - x| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Пусть теперь $\{x_n\}$ – фундаментальна. По данному $\varepsilon > 0$ найдем $N \in \mathbb{N}$ так, что при $n, m > N$ $|x_n - x_m| < \varepsilon/3$. Фиксировав $n = N$, получаем, что $\forall m > N$

$$x_N - \varepsilon/3 < x_m < x_N + \varepsilon/3. \tag{3.1}$$

Поскольку имеется всего конечное число членов последовательности $\{x_n\}$ с номерами, не превосходящими N, то доказано, что фундаментальная последовательность ограничена.

Для $n \in \mathbb{N}$ положим $a_n := \inf\limits_{k\ge n} x_k$, $b_n := \sup\limits_{k\ge n} x_k$.

Очевидно, что $a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n$ (поскольку при переходе к меньшему множеству точная нижняя грань не уменьшается, а точная верхняя грань не увеличивается). Последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$ имеет общую точку x по принципу Коши - Кантора.

Поскольку $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \le x \le b_n$, а при $k \ge n$

$$a_n = \inf_{k\ge n} x_k \le x_k \le \sup_{k\ge n} x_k = b_n,$$

то при $k \ge n$ $|x_k - x| \le b_n - a_n$. Но из (3.1) следует, что при $n > N$

$$x_N - \varepsilon/3 \le \inf_{k\ge n} x_k = a_n \le b_n = \sup_{k\ge n} \le x_N + \varepsilon/3.$$

Поэтому при $n > N$ $b_n - a_n \le \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$. Отсюда следует, что $|x_k - x| < \varepsilon$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Те утверждения, которые мы называем критериями, обязательно содержат необходимое и достаточное условия.

ПРИМЕР 3.1. Пусть $x_1 = 0$, $x_2 = 0,\alpha_1$, $x_3 = 0,\alpha_1\alpha_2$, ... – последовательность десятичных дробей, причем каждая последующая дробь получается приписыванием к предыдущей любой цифры от 0 до 9. Покажем, что такая последовательность всегда сходится. Пусть $n > m$. Тогда

$$|x_n - x_m| = \left|\frac{\alpha_{m+1}}{10^{m+1}} + \cdots + \frac{\alpha_n}{10^n}\right| \leq 9\left(\frac{1}{10^{m+1}} + \cdots + \frac{1}{10^n}\right) =$$

$$9 \cdot \frac{\frac{1}{10^{m+1}} - \frac{1}{10^{n+1}}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{10^m} - \frac{1}{10^n} < \frac{1}{10^m}.$$

Таким образом, подобрав $\forall\varepsilon > 0$ число N так, что $1/10^N < \varepsilon$, для любых $n > m > N$ получим $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Критерий Коши позволяет установить не только сходимость, но и расходимость последовательностей. Для этого построим отрицание определения фундаментальной последовательности:

$$\exists\varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists m, n > N \quad (|x_n - x_m| \geq \varepsilon).$$

ПРИМЕР 3.2. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n$. Поскольку $\forall N \in \mathbb{N}$

$$|x_{2N} - x_N| = \frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{2N} > N \cdot \frac{1}{2N} = \frac{1}{2},$$

то взяв $\varepsilon \leq 1/2$, получим расходимость последовательности.

Располагая некоторой информацией о поведении последовательностей (скажем, об их возрастании или убывании),мы можем делать заключения об их сходимости, не прибегая к критерию Коши.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Последовательность $\{x_n\}$ называется

– *монотонно возрастающей*, если $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ (x_n \leq x_{n+1})$;

– *монотонно убывающей*, если $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ (x_n \geq x_{n+1})$.

Множество *монотонных последовательностей* состоит из монотонно возрастающих и монотонно убывающих последовательностей.

ТЕОРЕМА 3.2 (критерий Вейерштрасса). *Монотонная последовательность сходится точно тогда, когда она ограничена.*

$\triangleleft$ Ограниченность сходящейся последовательности установлена при рассмотрении свойств предела последовательности.

Пусть $\{x_n\}$ – ограниченная монотонная (для определенности – возрастающая) последовательность. Поскольку множество $\{x_n : \quad n \in$

$\mathbb{N}\}$ ограничено, то $\exists \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = x$. $\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ (x - \varepsilon < x_N \le x)$, иначе x не было бы точной верхней гранью множества $\{x_n\}$. Поскольку $\{x_n\}$ – возрастающая последовательность, то при $n > N$ имеем

$$x - \varepsilon < x_N \le x_n \le x < x + \varepsilon.$$

Откуда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Аналогичные рассуждения проводятся и в случае монотонно убывающей последовательности. $\triangleright$

Рассмотрим примеры применения теоремы.

ПРИМЕР 3.3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{q^n} = 0$, если $q > 1$. Положим

$$x_{n+1} = \frac{n+1}{q^{n+1}} = \frac{n+1}{nq} \cdot \frac{n}{q^n} = \frac{n+1}{nq} \cdot x_n.$$

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{nq} = \frac{1}{q} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{q} < 1,$$

то в силу теоремы 2.2 (i)

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \left(\frac{n+1}{nq} < 1\right).$$

Таким образом, при $n > N$ $x_{n+1} < x_n$, то есть последовательность $\{x_n\}$ монотонно убывает. Члены последовательности ограничены снизу нулем, значит, $\exists x \in \mathbb{R}\ (\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x)$. Найдем его:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{nq} \cdot x_n = \frac{1}{q} x.$$

Откуда находим $x = 0$.

ПРИМЕР 3.4. Докажем существование предела последовательности $\{x_n : x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N}\}$. Прежде докажем *неравенство Бернулли*[1]:

$$(1+\alpha)^n \ge 1 + n\alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha > -1.$$

При $n = 1$ неравенство очевидно.

[1] Якоб Бернулли (1654-1705) – швейцарский математик, внес вклад в вариационное исчисление и теорию вероятностей.

Предполагаем его истинность при $n = k$, то есть $(1+\alpha)^k \geq 1+k\alpha$. Отсюда $(1+\alpha)^{k+1} = (1+\alpha)^k(1+\alpha) \geq (1+k\alpha)(1+\alpha) = 1+(k+1)\alpha + k\alpha^2 \geq 1+(k+1)\alpha$, то есть получили истинное высказывание при $n = k+1$. Итак, в силу принципа математической индукции неравенство доказано.

Покажем теперь, что последовательность $\{y_n : y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$ монотонно убывающая. Действительно

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n^{2n}}{(n^2-1)^n} \cdot \frac{n}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} \geq$$

$$\left(1+\frac{n}{n^2-1}\right) \cdot \frac{n}{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n+1} = 1.$$

Поскольку члены последовательности $\{y_n\}$ положительны, то последовательность ограничена снизу, сверху она ограничена членом y_1. По критерию Вейерштрасса существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^{n+1}$. Но

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^n = e$.

2.4 Подпоследовательности. Верхний и нижний пределы последовательности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Пусть задана последовательность $\{x_n\}$. Рассмотрим последовательность $\{n_k\}$ натуральных чисел такую, что $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ Тогда последовательность $\{x_{n_k}\}$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\{x_n\}$. Если последовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится, то ее предел называется *частичным пределом последовательности* $\{x_n\}$.

ТЕОРЕМА 4.1. *Всякая ограниченная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность.*

$\triangleleft$ Рассмотрим множество $E := \{x_n : \quad n \in \mathbb{N}\}$. Если E – конечное множество, то существует по крайней мере одна такая точка $x \in E$ и последовательность номеров $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ таких, что $x_{n_1} = x_{n_2} = \dots = x_{n_k} = \dots = x$.

Если E бесконечно, то по принципу Больцано - Вейерштрасса оно обладает по крайней мере одной предельной точкой x. Выберем n_1 так, что $|x_{n_1} - x| < 1$. Если n_k уже выбрано так, что $|x_{n_k} - x| < 1/k$, то учитывая, что x – предельная точка E, найдем n_{k+1} такое, что $|x_{n_{k+1}} - x| < \frac{1}{k+1}$ и $n_{k+1} > n_k$. Построенная таким образом подпоследовательность сходится к x. $\triangleright$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Пусть $\{x_n\}$ – последовательность. Тогда

$$(\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty) := (\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad (x_n > \varepsilon));$$

$$(\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty) := (\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad (x_n < -\varepsilon)).$$

В первом случае мы назовем последовательность $\{x_n\}$ *сходящейся к плюс бесконечности*, а во втором – *сходящейся к минус бесконечности.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. *Верхний предел* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ последовательности $\{x_n\}$ определяется следующим образом:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k.$$

Нижний предел $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ последовательности определяется как

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} x_k.$$

ПРИМЕР 4.1. Рассмотрим расходящуюся последовательность $\{(-1)^n\}$. Покажем, что она имеет верхний и нижний пределы. Действительно,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (-1)^n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} (-1)^k = \lim_{n\to\infty} 1 = 1,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} (-1)^n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} (-1)^k = \lim_{n\to\infty} (-1) = -1.$$

Для вычисления верхних и нижних пределов очень удобна следующая

ТЕОРЕМА 4.2. *Верхний и нижний пределы последовательности являются соответственно наибольшим и наименьшим из ее частичных пределов.*

$\triangleleft$ Докажем теорему для нижнего предела $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ последовательности $\{x_n\}$. Для верхнего предела теорема доказывается аналогично.

Предположим сначала, что $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность. Рассмотрим последовательность $i_k = \inf\limits_{n\geq k} x_n$. Она монотонно возрастает (так как $\inf\limits_{n\geq k} x_n \leq \inf\limits_{n\geq k+1} x_n$), следовательно, по критерию Вейерштрасса, имеет предел $i = \lim\limits_{k\to\infty} i_k$. Покажем, что i – частичный предел последовательности $\{x_n\}$. Используя определение точной нижней грани, подберем числа n_k так, что $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ и $i_k \leq x_{n_k} \leq i_k + 1/k$. Поскольку $\lim\limits_{k\to\infty} i_k = \lim\limits_{k\to\infty}(i_k + 1/k) = i$, то по "теореме о двух милиционерах" $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = i$. Покажем, что i и есть наименьший частичный предел. По определению $\forall\varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N}$ $(i - \varepsilon \leq i_k = \inf\limits_{n\geq k} x_n \leq x_n\ \forall n \geq k$. Неравенство $i - \varepsilon \leq x_n\ \forall n > k$ означает, что ни один частичный предел нашей последовательности не может быть меньше $i - \varepsilon$.

Если последовательность $\{x_n\}$ неограничена (допустим снизу), то по определению можно подобрать последовательность $\{x_{n_k}\}$ такую, что $x_{n_k} < -k$. Поэтому $-\infty$ является частичным пределом последовательности $\{x_n\}$, и меньших частичных пределов не существует.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Последовательность имеет предел или стремится к $+\infty$ или $-\infty$ точно тогда, когда ее верхний и нижний пределы совпадают.*

$\triangleleft$ Пусть последовательность $\{x_n\}$ имеет предел x, и пусть $\{x_{n_k}\}$ – некоторая подпоследовательность. Тогда $\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N$ $(|x_n - x| < \varepsilon)$. Выберем $K \in \mathbb{N}$ такое, что при $k > K$ $n_k > N$. При таких k $|x_{n_k} - x| < \varepsilon$, то есть $\{x_{n_k}\}$ тоже сходится к x. Ввиду произвола в выборе подпоследовательности мы показали, что все частичные пределы последовательности $\{x_n\}$ совпадают. Значит, верхний и нижний пределы последовательности $\{x_n\}$ совпадают. Аналогичное устанавливается и в случаях $x = \pm\infty$.

Пусть $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = x$. В силу определения имеем

$$\inf_{k\geq n} x_k \leq x_n \leq \sup_{k\geq n} x_k.$$

Окончательный результат получается после применения "теоремы о двух милиционерах". $\triangleright$

2.5 Сходимость числового ряда. Свойства сходящихся числовых рядов

Числовым рядом называется формальное выражение вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + \ldots, \tag{5.1}$$

где x_k – члены некоторой последовательности (они называются также *членами ряда*). Мы придадим точный смысл выражению (5.1), указав условия, при которых этому выражению можно сопоставить некоторое число, называемое *суммой ряда.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Числа

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

называются *частичными суммами* числового ряда (в дальнейшем просто ряда) (5.1). *Суммой* ряда (5.1) называется конечный предел последовательности частичных сумм. Этот предел обозначается тем же символом, что ряд (5.1). В последнем случае, если

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty \quad (\infty),$$

то мы будем уточнять, что ряд (5.1) *расходится* к $\pm\infty$ или ∞ соответственно.

Ясно, что любую теорему о последовательностях можно сформулировать на языке рядов (полагая $x_1 = S_1$, $x_n = S_n - S_{n-1}$ при $n > 1$) и обратно. Но тем не менее мы будем различать эти понятия.

ПРИМЕР 5.1. Рассмотрим бесконечную геометрическую прогрессию $\{aq^k\}$, $|q| < 1$. Поскольку последовательность частичных сумм

$$S_n = aq + aq^2 + \cdots + aq^n = \frac{aq(1-q^n)}{1-q}$$

сходится к

$$\frac{aq}{1-q},$$

то перед нами первый сходящийся ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} aq^k = \frac{aq}{1-q}.$$

ПРИМЕР 5.2. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots .$$

Если расставить скобки так $(1-1)+(1-1)+\ldots$, то в результате получим нуль, если иначе $1-(1-1)-(1-1)-\ldots$, то в результате получим единицу. Объяснение в том, что перед нами расходящийся ряд, так как его частичные суммы образуют расходящуюся последовательность $\{1, 0, 1, 0, \ldots\}$.

ТЕОРЕМА 5.1. *Ряд (5.1) сходится точно тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \left(\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right| < \varepsilon \right). \tag{5.2}$$

$\lhd$ По определению 5.1 ряд (5.1) сходится, если существует конечный предел его частичных сумм. В силу критерия Коши для последовательностей конечный предел последовательности $\{S_n\}$ существует точно тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad (|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon).$$

Осталось заметить, что

$$S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k. \quad \rhd$$

Теорема 5.1 называется *критерием Коши для числовых рядов*

СЛЕДСТВИЕ 5.1. *Если ряд (5.1) сходится, то* $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$.

$\lhd$ Пусть ряд (5.1) сходится. Тогда, положив в (5.2) $p = 1$, получим требуемое. $\rhd$

Утверждение следствия 5.1 называется *необходимым признаком сходимости ряда.* Тот факт, что этот признак не может быть достаточным, показывает следующий

ПРИМЕР 5.3. Рассмотрим *гармонический ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots .$$

Очевидно,что $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$. Но согласно примеру 3.2 последовательность частичных сумм этого ряда, расходится по критерию Коши.

Теперь рассмотрим свойства сходящихся рядов.

ТЕОРЕМА 5.2. (i) *Если сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$, *то сходится и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} cx_k$ *при любом* $c \in \mathbb{R}$, *причем*

$$\sum_{k=1}^{\infty} cx_k = c\sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

(ii) *Если сходятся ряды* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$, *то сходится и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (x_k + y_k)$, *причем*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x_k + y_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k + \sum_{k=1}^{\infty} y_k.$$

УПРАЖНЕНИЕ 5.1. Доказать теорему 5.1, воспользовавшись аналогичными результатами для последовательностей.

2.6 Ряды с неотрицательными членами. Признаки сравнения

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ называется *рядом с неотрицательными членами*, если $x_k \geq 0\ \forall k \in \mathbb{N}$.

ТЕОРЕМА 6.1. *Ряд с неотрицательными членами сходится точно тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена.*

$\lhd$ Пусть ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \tag{6.1}$$

сходится, тогда последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм ограничена, так как она сходится.

Если ряд (6.1) является рядом с неотрицательными числами, то последовательность его частичных сумм $\{S_n\}$ монотонно возрастает, так как

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} x_k = S_n + x_{n+1} \geq S_n$$

Поскольку она ограничена, то в силу критерия Вейерштрасса для последовательностей существует конечный предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.$\triangleright$

Теорема 6.1 называется *критерием Вейерштрасса* для рядов. Перейдем к формулировке и доказательству *признаков сравнения.*

ТЕОРЕМА 6.2. *Пусть даны два ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \tag{6.2}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k \tag{6.3}$$

с неотрицательными членами. Тогда

(i) *если* $x_k \leq y_k$ *при любых* $k > N \in \mathbb{N}$, *то из сходимости ряда (6.3) следует сходимость ряда (6.2), а из расходимости ряда (6.2) следует расходимость ряда (6.3);*

(ii) *если существует предел*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{y_k} = a > 0, a \in \mathbb{R}, \tag{6.4}$$

то ряды (6.2) и (6.3) сходятся или расходятся одновременно.

$\triangleleft$ (i) Пусть ряд (6.3) сходится, и S – его сумма. Тогда последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм ряда (6.2) ограничена, так как

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \leq \sum_{k=1}^{n} y_k \leq S.$$

Отсюда в силу теоремы 6.1 сходится ряд (6.2).

Теперь пусть ряд (6.2) расходится. Тогда в силу теоремы 6.1 последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм неограничена. Значит, неограничена и последовательность $\{S'_n\}$ частичных сумм ряда (6.3), ибо

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \leq \sum_{k=1}^{n} y_k = S'_n.$$

Отсюда в силу теоремы 6.1 следует расходимость ряда (6.3).

(ii) Если существует предел (6.4), то по определению предела последовательности для данного $\varepsilon \in (0, a)$ найдем число $N \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $k > N$

$$a - \varepsilon < \frac{x_k}{y_k} < a + \varepsilon.$$

Отсюда,

$$(a - \varepsilon)y_k < x_k < (a + \varepsilon)y_k.$$

Если ряд (6.3) сходится, то сходится и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a + \varepsilon)y_k,$$

а отсюда следует сходимость ряда (6.2). Если ряд (6.3) расходится, то расходится и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a - \varepsilon)y_k,$$

и поэтому расходится ряд (6.2). $\triangleright$

От признаков сравнения самих по себе мало толку. Чтобы их успешно применять, возьмем в качестве индикатора *обобщенный гармонический ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}.$$

ТЕОРЕМА 6.3. *Обобщенный гармонический ряд при $\alpha \leq 1$ расходится, а при $\alpha > 1$ сходится.*

Доказательству теоремы предпошлем вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 6.1 (лемма Коши). *Пусть дан ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \tag{6.5}$$

с неотрицательными членами, причем его члены образуют монотонно убывающую последовательность. Ряд (6.5) сходится точно тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x_{2^k} = x_1 + 2x_2 + 4x_4 + \ldots.$$

$\lhd$ Рассмотрим последовательности $\{S_n\}$ и $\{T_m\}$ частичных сумм

$$S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \quad T_m = x_1 + 2x_2 + \cdots + 2^m x_{2^m}.$$

При $n < 2^m$ имеем

$$S_n \leq x_1+(x_2+x_3)+\cdots+(x_{2^m}+\cdots+x_{2^{m+1}-1}) \leq x_1+2x_2+\cdots+2^m x_{2^m} = T_m, \tag{6.6}$$

а при $n > 2^m$ имеем

$$\begin{aligned} S_n &\geq x_1 + x_2 + (x_3 + x_4) + \cdots + (x_{2^{m-1}+1} + \cdots + x_{2^m}) \geq \\ &\tfrac{1}{2}x_1 + x_2 + 2x_4 + \cdots + 2^{m-1}x_{2^m} = \tfrac{1}{2}T_m. \end{aligned} \tag{6.7}$$

В силу (6.6) и (6.7) последовательности $\{S_n\}$ и $\{T_m\}$ или обе ограничены, или обе неограничены. Ссылка на теорему 6.1 завершает доказательство. $\rhd$

Перейдем к доказательству теоремы 6.3.

$\lhd$ Если $\alpha \leq 0$, то расходимость обощенного гармонического ряда следует из необходимого признака сходимости. Итак, пусть $\alpha > 0$. Тогда применима лемма Коши, и мы приходим к ряду

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^{k\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1-\alpha)k}.$$

Этот ряд сходится точно тогда, когда $2^{1-\alpha} < 1$, а это равносильно равенству $\alpha > 1$. $\rhd$

2.7 Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости

Перейдем к рассмотрению рядов вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k, \tag{7.1}$$

где $x_k > 0$ при всех $k > N \in \mathbb{N}$. Ряды такого вида будем называть *рядами с положительными членами.*

ТЕОРЕМА 7.1 (признак Даламбера [1]). *Пусть дан ряд (7.1) с положительными членами и существует предел*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1}}{x_k} = q.$$

[1] Жан Лерон Даламбер (1717-1783) – французский математик, механик, философ. Основные исследования относятся к механике, гидродинамике, математической физике и математическому анализу.

Тогда

(i) *при* $q < 1$ *ряд сходится, а при* $q > 1$ – *расходится*;

(ii) *существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды при* $q = 1$.

$\lhd$ (i) Пусть $q < 1$. Тогда в силу определения предела последовательности для данного $\varepsilon > 0$ такого, что $q + \varepsilon < 1$ выберем число $N \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} < q + \varepsilon < 1 \quad \forall k > N.$$

Теперь заметим, что

$$x_k = x_N \frac{x_{N+1}}{x_N} \dots \frac{x_k}{x_{k-1}} < x_N (q+\varepsilon)^{k-N} \quad \forall k > N. \tag{7.2}$$

В силу первого признака сравнения ряд (7.1) сходится, поскольку сходится ряд

$$\sum_{k=N}^{\infty} x_N (q+\varepsilon)^{k-N}$$

и имеет место (7.2).

Пусть теперь $q > 1$. Рассуждая как в предыдущем случае, получим неравенство

$$x_k > x_N (q-\varepsilon)^{k-N} \quad \forall k > N,$$

где число $\varepsilon > 0$ такое, что $q - \varepsilon > 1$. Результат получится, если сравнить ряд (7.1) с рядом

$$\sum_{k=N}^{\infty} x_N (q-\varepsilon)^{k-N}.$$

(ii) Применим признак Даламбера к обобщенному гармоническому ряду

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k^{\alpha}}{k^{\alpha+1}} = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^{\alpha} = 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}_+.$$

Однако известно, что при $0 \le \alpha \le 1$ обобщенный гармонический ряд расходится, а при $\alpha > 1$ сходится. $\rhd$

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Существует более общий признак Даламбера, доказываемый аналогично, – ряд (7.1) сходится, если

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{x_{k+1}}{x_k} < 1,$$

и расходится, если

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}\frac{x_{k+1}}{x_k} > 1.$$

ТЕОРЕМА 7.2 (признак Коши). *Пусть дан ряд (7.1) с положительными членами и существует предел*

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{x_k} = q.$$

Тогда

(i) *при $q < 1$ ряд сходится, а при $q > 1$ – расходится*;

(ii) *существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды при $q = 1$.*

$\lhd$ (i) Пусть $q < 1$. Тогда для данного $\varepsilon > 0$ такого, что $q + \varepsilon < 1$ подберем число $N \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\sqrt[k]{x_k} < q + \varepsilon \quad \forall k > N.$$

Отсюда получаем

$$x_k < (q+\varepsilon)^k.$$

В силу первого признака сравнения ряд (7.1) сходится, поскольку очевидно сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(q+\varepsilon)^k.$$

Пусть теперь $q > 1$. Тогда в силу свойств предела последовательности имеем $\sqrt[k]{x_k} > 1$ при всех $k \in \mathbb{N}$ больших некоторого $N \in \mathbb{N}$. Значит, $x_k > 1$ $\forall k > N$. Отсюда в силу необходимого признака сходимости вытекает, что ряд (7.1) расходится.

(ii) Применим признак Коши к обобщенному гармоническому ряду

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{k^\alpha}} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[k]{k}}\right)^\alpha = 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}_+.$$

Но при $0 \le \alpha \le 1$ обобщенный гармонический ряд расходится, а при $\alpha > 1$ сходится. $\rhd$

ЗАМЕЧАНИЕ 7.2. Существует более общий признак Коши, доказываемый аналогично, – ряд (7.1) сходится, если $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{x_k} < 1$, и расходится, если $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{x_k} > 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.3. Признак Даламбера обычно легче применять, чем признак Коши, так как в большинстве случаев проще вычислять частные, чем корни k-й степени. Однако признак Коши сильнее в следующем смысле: когда признак Даламбера указывает на сходимость, то и признак Коши указывает на сходимость; если же признак Коши не позволяет сделать никаких заключений, то и признак Даламбера не позволяет сделать никаких заключений. Этот факт мы доказывать не будем, однако проиллюстрируем примером.

ПРИМЕР 7.1. Рассмотрим ряд $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots$, для которого

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}\frac{x_{k+1}}{x_k}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k=0;\quad \overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{x_{k+1}}{x_k}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^k\cdot\frac{1}{2}=+\infty;$$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{x_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[2k-1]{2^k}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Признак Коши указывает на сходимость, а признак Даламбера не позволяет сделать заключение.

2.8 Незнакопостоянные ряды. Достаточные признаки сходимости

В двух предыдущих разделах мы изучали признаки сходимости рядов с неотрицательными и положительными членами. Очевидно, что эти признаки с успехом можно использовать при исследовании сходимости рядов с неположительными и отрицательными членами. Все эти разновидности рядов называется *знакопостоянными рядами.* Рассмотрим теперь некоторые виды *незнакопостоянных рядов.*

Пусть дан ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k. \tag{8.1}$$

Исследованию сходимости ряда (8.1) предпошлем один вспомогательный результат.

ЛЕММА 8.1 (неравенство Абеля[1]). *Пусть даны числа a_k и b_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, такие, что либо $a_k \geq a_{k+1}$, либо $a_k \leq a_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, и, кроме того, $|b_1 + \cdots + b_k| \leq B$, $k = 1, \ldots, n$. Тогда*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq B(|a_1| + 2|a_n|).$$

$\triangleleft$ Обозначим $S = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k$ и положим $B_m = \sum\limits_{k=1}^{m} b_k$, $m = 1, 2, \ldots, n$. Тогда

$$S = (a_1 - a_2)B_1 + (a_2 - a_3)B_2 + \cdots + (a_{n-1} - a_n)B_{n-1} + a_n B_n,$$

то есть

$$S = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1})B_k + a_n B_n.$$

Отсюда

$$|S| \leq \sum_{k=1}^{n-1} |a_k - a_{k+1}| \cdot |B_k| + |a_n| \cdot |B_n|.$$

По условию $|B_k| \leq B$, $k = 1, 2, \ldots, n$, поэтому

$$|S| \leq B\left(\sum_{k=1}^{n-1} |a_k - a_{k+1}| + |a_n|\right). \tag{8.2}$$

Если $a_k \geq a_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, то

$$\sum_{k=1}^{n-1} |a_k - a_{k+1}| = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_n \leq |a_1| + |a_n|.$$

Если же $a_k \leq a_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, то

$$\sum_{k=1}^{n-1} |a_k - a_{k+1}| = \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = a_n - a_1 \leq |a_1| + |a_n|.$$

Отсюда и из (8.2) получаем утверждение леммы. $\triangleright$

[1]Нильс Хенрик Абель (1802-1829) – норвежский математик. Основные работы относятся к алгебре, теории функций и математическому анализу.

ТЕОРЕМА 8.1 (признак Абеля). *Если последовательность* $\{x_k\}$ *монотонна и ограничена, а ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k \tag{8.3}$$

сходится, то ряд (8.1) также сходится.

$\triangleleft$ Пусть последовательность $\{x_k\}$ ограничена числом $x > 0$. В силу критерия Коши для рядов по заданному $\varepsilon > 0$ найдем число $N \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} y_k\right| < \frac{\varepsilon}{3x} \quad \forall n > N \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

В силу неравенства Абеля

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k y_k\right| < \frac{\varepsilon}{3x}(|x_{n+1}| + 2|x_{n+p}|) < \varepsilon \quad \forall n > N \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Отсюда в силу критерия Коши вытекает утверждение теоремы. $\triangleright$

ТЕОРЕМА 8.2 (признак Дирихле). *Пусть дан ряд (8.1) такой, что последовательность* $\{x_k\}$ *монотонно стремится к нулю, а последовательность* $\{Y_n\}$ *частичных сумм ряда (8.3) ограничена. Тогда ряд (8.1) сходится.*

$\triangleleft$ Пусть последовательность $\{Y_n\}$ ограничена числом $Y > 0$. В силу сходимости последовательности $\{x_k\}$ по данному $\varepsilon > 0$ найдем число $N \in \mathbb{N}$ такое, что

$$|x_k| < \frac{\varepsilon}{6Y} \quad \forall k > N.$$

Поскольку

$$\left|\sum_{k=n+1}^{k=n+q} y_k\right| = |Y_{n+q} - Y_n| \le 2Y \quad \forall q \in \mathbb{N},$$

то в силу неравенства Абеля имеем

$$\left|\sum_{k=n+1}^{k=n+p} x_k y_k\right| \le 2Y(|x_{n+1}| + 2|x_{n+p}|) < 2 \cdot \frac{3Y}{6Y} \cdot \varepsilon = \varepsilon$$

при всех $n > N$ и $p \in \mathbb{N}$. Отсюда в силу критерия Коши вытекает утверждение теоремы. $\triangleright$

СЛЕДСТВИЕ 8.1 (признак Лейбница). *Пусть дан ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}x_k, \tag{8.4}$$

причем последовательность $\{x_k\}$ *монотонно стремится к нулю. Тогда ряд (8.4) сходится.*

$\triangleleft$ Поскольку последовательность

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n \quad \text{четном;} \\ 1 & \text{при} \quad n \quad \text{нечетном} \end{cases}$$

частичных сумм ряда (8.4) ограничена, а последовательность $\{x_k\}$ монотонно стремится к нулю, то сходимость ряда (8.4) вытекает из признака Дирихле. $\triangleright$

2.9 Абсолютно сходящиеся ряды

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ называется *абсолютно сходящимся* (*расходящимся*), если сходится (расходится) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|$.

Положим

$$x_k^+ = \begin{cases} x_k & \text{при} \quad x_k \geq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x_k < 0, \end{cases} \qquad x_k^- = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x_k \geq 0, \\ -x_k & \text{при} \quad x_k < 0. \end{cases}$$

Числа x_k^+, x_k^-, очевидно, неотрицательные, причем

$$x_k = x_k^+ - x_k^-, \quad |x_k| = x_k^+ + x_k^-.$$

ТЕОРЕМА 9.1. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ *абсолютно сходится точно тогда, когда сходятся ряды* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^+$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^-$.

$\triangleleft$ Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ абсолютно сходится. Поскольку $|x_k| \geq x_k^+$ и $|x_k| \geq x_k^-$, то отсюда в силу первого признака сравнения следует сходимость рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^+$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^-$.

Если же сходятся ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^+$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^-$, то в силу равенства $x_k^+ + x_k^- = |x_k|$ и свойств сходящихся рядов отсюда следует абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$. $\triangleright$

СЛЕДСТВИЕ 9.1.*Абсолютно сходящийся ряд сходится.*

$\triangleleft$ В силу теоремы 9.1 из абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ следует сходимость рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^+$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^-$. В силу равенства $x_k^+ - x_k^- = x_k$ и свойств сходящихся рядов отсюда вытекает сходимость самого ряда. $\triangleright$

Обратное утверждение неверно, что показывает следующий

ПРИМЕР 9.1. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots .$$

Этот ряд сходится в силу признака Лейбница. Однако абсолютно этот ряд расходится, поскольку

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots .$$

ТЕОРЕМА 9.2 (теорема Коши об абсолютно сходящихся рядах). *Пусть ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ *абсолютно сходится. Тогда ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$*, составленный из тех же членов, но взятых в другом порядке, также абсолютно сходится и имеет ту же сумму.*

$\triangleleft$ Для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$ введем последовательности $\{y_k^+\}$ и $\{y_k^-\}$ аналогично последовательностям $\{x_k^+\}$ и $\{x_k^-\}$. Покажем, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^+ = \sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k^+$. (Равенство $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^- = \sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k^-$ доказывается аналогично).

Рассмотрим частичную сумму $Y_n^+ = y_1^+ + \dots + y_n^+$. Члены $y_1^+, \dots, y_n^+$ находятся в ряде $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^+$ под номерами $k_1, \dots, k_n$. Пусть N – наибольший среди них и $X_N^+ = x_1^+ + \dots + x_N^+$ – соответствующая частичная сумма. Очевидно,

$$Y_n^+ \le X_N^+ \le X^+ = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^+.$$

Таким образом, частичные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k^+$ ограничены и в силу критерия Вейерштрасса для рядов существует сумма

$$Y^+ = \sum_{k=1}^{\infty} y_k^+.$$

Понятно, что $Y^+ \le X^+$. Поменяв местами ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^+$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k^+$ и, повторив рассуждения, получим $X^+ \le Y^+$. Стало быть, $X^+ = Y^+$. Теперь в силу теоремы 9.1 и свойств сходящихся рядов имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \sum_{k=1}^{\infty}(x_k^+ - x_k^-) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} x_k^- = \sum_{k=1}^{\infty} y_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} y_k^- = \sum_{k=1}^{\infty} y_k. \quad \triangleright$$

2.10 Условно сходящиеся ряды

Ряд называется *условно сходящимся*, если он сходится, но не абсолютно. Как показывает пример 9.1, условно сходящиеся ряды существуют.

ТЕОРЕМА 10.1 (теорема Римана[1] об условно сходящихся рядах). *Пусть ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ *сходится условно. Тогда, каково бы ни было* S $(-\infty \le S \le +\infty)$, *путем перестановки членов ряда можно добиться, чтобы сумма ряда была равна* S.

$\triangleleft$ Отметим прежде всего, что для условно сходящихся рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^+ = +\infty \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} x_k^- = +\infty.$$

Действительно, в силу теоремы 9.1 хотя бы один из этих рядов рас-

[1] Георг Фридрих Бернгард Риман (1826-1866) – немецкий математик. Основные исследования относятся к теории функций, геометрии, математической и теоретической физике.

ходится. Пусть для определенности $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^+ = +\infty$. Поскольку

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^- = \sum_{k=1}^{n} x_k^+ + \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

то, переходя в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$, получим $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^- = +\infty$.

Кроме того отметим еще, что в силу необходимого признака сходимости $x_k \to 0$ при $k \to \infty$. А это означает, что $x_k^+ \to 0$ при $k \to \infty$.

Пусть теперь $S \in \mathbb{R}$. Подберем натуральные числа $n_1 < n_2 < \dots$, $n_1' < n_2' < \dots$ как наименьшие числа, для которых выполняются неравенства

$$S_{n_1} = \sum_{k=1}^{n_1} x_k^+ > S, \quad (10.1) \quad S_{n_1'} = S_{n_1} - \sum_{k=1}^{n_1'} x_k^- < S \quad (10.2),$$

$$S_{n_2} = S_{n_1'} + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} x_k^+ > S, \quad (10.3) \quad S_{n_2'} = S_{n_2} - \sum_{k=n_1'+1}^{n_2'} x_k^- < S \quad (10.4), \dots$$

Возможность подобрать такие числа n_k и n_k' следует из расходимости рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^+$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^-$.

Покажем, что ряд

$$\sum_{k=1}^{n_1} x_k^+ - \sum_{k=1}^{n_1'} x_k^- + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} x_k^+ - \sum_{k=n_1'+1}^{n_2'} x_k^- + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

сходится к S. Рассмотрим сначала последовательность частичных сумм $\{S_{n_k}\}$. По построению

$$|S - S_{n_k}| = S_{n_k} - S \le x_{n_k}^+.$$

Поскольку $x_k^+ \to 0$ при $k \to \infty$, то и $x_{n_k}^+ \to 0$ при $k \to \infty$. Отсюда $S_{n_k} \to S$. Аналогично показывается, что $S_{n_k'} \to S$. Рассмотрим теперь произвольную частичную сумму S_n ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$. По построению для любого $n \in \mathbb{N}$ можно подобрать такие n_k' и n_{k+1}, либо n_k и n_k', что $S_{n'_k} \le S_n \le S_{n_{k+1}}$, либо $S_{n'_k} \le S_n \le S_{n_k}$. Отсюда в силу теоремы о двух милиционерах следует утверждение.

Чтобы получить утверждение теоремы при $S = +\infty$, надо в неравенствах (10.1), (10.2), (10.3), (10.4) и т. д. вместо S взять числа $2, 1, 4, 3$ и т. д. соответственно. $\triangleright$

УПРАЖНЕНИЕ 10.1. Доказать теорему 10.1 при $S = \pm\infty$.

ПРИМЕР 10.1. Ранее мы показали, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ сходится условно. Обозначим через S сумму этого ряда и переставим его члены так, чтобы он имел сумму в два раза меньшую. Для этого сгруппируем члены ряда следующим образом:

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) + \dots$$

Рассмотрим частичную сумму S'_{3m} нового ряда

$$S'_{3m} = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2} S_{2m},$$

где S_{2m} – частичная сумма исходного ряда. Очевидно,

$$\lim_{m\to\infty} S'_{3m} = \frac{1}{2} \lim_{m\to\infty} S_{2m} = \frac{1}{2} S.$$

Кроме того,

$$S'_{3m-1} = S_{3m} + \frac{1}{4m}, \quad S'_{3m-2} = S'_{3m-1} + \frac{1}{4m-2}.$$

Поэтому окончательно имеем

$$\lim_{m\to\infty} S'_{3m} = \lim_{m\to\infty} S'_{3m-1} = \lim_{m\to\infty} S'_{3m-2} = \frac{1}{2} S.$$

3 НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

- Это кто же такой? -
- А по-твоему, кто это?
- Понятия не имею. Кто это?
Льюис Кэролл "Алиса в Зазеркалье"

3.1 Предел функции в точке и его свойства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Отображение $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, где $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$, называется *функцией*. Множество $\mathcal{X} = \operatorname{dom} f$ называется *областью определения* функции, а каждый его элемент будем называть *аргументом* функции. Образ множества $\mathcal{X}$ $\operatorname{im} f = f[\mathcal{X}] \subset \mathbb{R}$ будем называть *областью значений* функции f, а его элементы $y = f(x) \in \operatorname{im} f$ будем называть *значениями* функции f.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Точка $y_0 \in \mathbb{R}$ называется *пределом* функции $y = f(x)$ в точке x_0, если для любой последовательности $\{x_n\} \subset \operatorname{dom} f$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ и $x_n \neq x_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к y_0 (определение по Гейне).

С помощью логической символики это определение запишется в следующем виде

$$(y_0 = \lim_{x\to x_0} f(x)) := (\forall \{x_n\} \subset \operatorname{dom} f \setminus \{x_0\}$$

$$(\lim x_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0)).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Точка $y_0 \in \mathbb{R}$ называется *пределом* функции $y = f(x)$ *в точке* x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из неравенства $0 < |x - x_0| < \delta$, $x \in \operatorname{dom} f$, следует неравенство $|f(x) - y_0| < \varepsilon$ (определение по Коши).

Переведем и это определение на язык логических символов:

$$(y_0 = \lim_{x\to x_0} f(x)) := (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \operatorname{dom} f$$

$$(0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - y_0| < \varepsilon)).$$

ТЕОРЕМА 1.1. *Определения предела функции по Гейне и по Коши эквивалентны.*

$\lhd$ (предел по Гейне) $\Rightarrow$ (предел по Коши). Докажем от противного, то есть допустим, что предел y_0 функции $y = f(x)$ в точке x_0

по Гейне не является пределом по Коши. Последнее в логической символике означает:

$$\exists\varepsilon \quad \forall\delta > 0 \quad \exists x \in \operatorname{dom} f \quad (0 < |x - x_0| < \delta \quad \wedge \quad |f(x) - y_0| \geq \varepsilon).$$

Отсюда следует, что для каждого члена последовательности $\{\delta_n : \delta_n = n^{-1}\}$ найдется элемент $x_n \in \operatorname{dom} f$ такой, что

$$0 < |x_n - x_0| < \delta_n \quad \text{и} \quad |f(x_n) - y_0| \geq \varepsilon.$$

Левые неравенства означают, что $(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0) \wedge (x_n \neq x_0)$, а правое означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq y_0$. Противоречие.

(предел по Коши) $\Rightarrow$ (предел по Гейне). Выберем некоторую последовательность $\{x_n\} \subset \operatorname{dom} f \setminus \{x_0\}$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, и покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$. Для данного $\delta > 0$ подберем $N \in \mathbb{N}$ так, чтобы $0 < |x - x_0| < \delta$ при $n > N$. В силу определения по Коши отсюда следует, что $|f(x_n) - y_0| < \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$. $\triangleright$

Рассмотрим примеры.

ПРИМЕР 1.1. Рассмотрим функцию $f(x) = |\mathrm{sgn} x|$. Ее область определения $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$, область значений $\operatorname{im} f = \{0, 1\}$. Найдем $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. В силу определения Гейне для любой последовательности $\{x_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ и $x_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} |\mathrm{sgn} x_n| = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$.

ПРИМЕР 1.2. Рассмотрим функцию $f(x) = x \sin x^{-1}$. Ее область определения $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Покажем, что $\lim\limits_{x\to 0} x \sin x^{-1} = 0$. Воспользуемся определением Коши. Для заданного $\varepsilon > 0$ возьмем $\delta = \varepsilon$, тогда из неравенства $0 < |x| < \delta$ будет следовать неравенство $|f(x) - 0| = |x \sin x^{-1}| \leq |x| < \varepsilon$.

ПРИМЕР 1.3. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x^{-1}$. Ее область определения $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ та же, что и у функции в предыдущем примере. Однако предела $\lim\limits_{x\to 0} \sin x^{-1}$ не существует. Воспользуемся определением по Гейне. Выберем две последовательности

$$\left\{x_n' = \frac{1}{\pi n}\right\} \quad \text{и} \quad \left\{x_n'' = \frac{2}{(4n+1)\pi}\right\}.$$

Понятно, что $x'_n \neq 0$ и $x''_n \neq 0$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = \lim\limits_{n\to\infty} x'_n = 0$. Но $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin \pi n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin(2n + 1/2)\pi = 1$.

Перейдем к рассмотрению некоторых играющих особенно важную роль свойств предела функции в точке. Для этого напомним старые и введем новые понятия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. *Окрестностью* O_x точки $x \in \mathbb{R}$ называется любой интервал $I \subset \mathbb{R}$, содержащий точку x; δ-*окрестностью* O_x^δ точки x называется интервал $(x-\delta, x+\delta)$. *Проколотой окрестностью* $\overset{\bullet}{O}_x$ (*проколотой* δ-окрестностью $\overset{\bullet}{O}{}_x^{\delta}$) точки x называется соответствующий интервал с выброшенной точкой x.

Используя введенные понятия, определение предела функции по Коши можно записать более компактно:

$$(y_0 = \lim_{x\to x_0} f(x)) :=$$

$$(\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad (x \in \overset{\bullet}{O}{}_{x_0}^{\delta} \cap \operatorname{dom} f \quad \Rightarrow \quad f(x) \in O_{y_0}^{\varepsilon})).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной, ограниченной сверху, ограниченной снизу*, если найдется такое число $c \in \mathbb{R}$, что для всех $x \in \operatorname{dom} f$ выполнено соответственно $|f(x)| < c$, $f(x) < c$, $f(x) > c$. В случае, если первое, второе или третье из этих соотношений выполнено в некоторой проколотой окрестности точки x, то функция называется соответственно *локально* (*финально*) *ограниченной, локально* (*финально*) *ограниченной сверху, локально* (*финально*) *ограниченной снизу.*

СВОЙСТВА предела функции в точке.

(i) *Пусть существует предел* $y_0 = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\overset{\bullet}{O}_{x_0} \subset \operatorname{dom} f$, *тогда функция локально ограничена.*

(ii) *Пусть существуют пределы* $y_1 = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $y_2 = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. *Тогда* $y_1 = y_2$.

$\lhd$ (i) По определению Коши $(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0) := (\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \in \operatorname{dom} f \quad (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon))$. Расписав последнее неравенство, получим

$$y_0 - \varepsilon < f(x) < y_0 + \varepsilon \quad \forall x \in \overset{\bullet}{O}{}_{x_0}^{\delta} \cap \operatorname{dom} f \supset \overset{\bullet}{O}{}_{x_0}^{\delta} \cap \overset{\bullet}{O}_{x_0} = \overset{\bullet}{O}{}_{x_0}^{\prime} .$$

Откуда $|f(x)| < c \ \forall x \in \overset{\bullet}{O}{}'_{x_0}$, где $c = \max\{|y_0 - \varepsilon|, |y_0 + \varepsilon|\}$.

(ii) По определению Гейне из $(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_1) \wedge (\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_2)$ следует, что существует сходящаяся последовательность $\{f(x_n)\}$, причем $(\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = y_1) \wedge (\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = y_2)$. В силу свойства предела последовательности $y_1 = y_2$. $\triangleright$

3.2 Предел, арифметические операции и неравенства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Если у двух функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ области определения совпадают $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom} g = \mathcal{X}$, то их *суммой*, *произведением* и *частным* называются соответственно функции, определенные следующими формулами:

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad (f \cdot g)(x) = f(x)g(x),$$

$$\operatorname{dom}(f+g) = \operatorname{dom}(fg) = \mathcal{X},$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \operatorname{dom}(fg) = \mathcal{X} \setminus \{x \in \mathcal{X} : \quad g(x) = 0\}.$$

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – две функции с общей областью определения. Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_1$, а $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = y_2$, то*

(i) $\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x) = y_1 + y_2$;

(ii) $\lim\limits_{x \to x_0} (fg)(x) = y_1 \cdot y_2$;

(iii) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{y_1}{y_2}$, *если* $y_2 \neq 0$.

$\triangleleft$ Пусть последовательность $\{x_n\} \subset \mathcal{X} = \operatorname{dom} f = \operatorname{dom} g$ такая, что $(x_n \neq x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}) \wedge (\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0)$. Тогда в силу определения Гейне $(\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = y_1) \wedge (\lim\limits_{n \to \infty} g(x_n) = y_2)$. В силу соответствующих свойств последовательностей имеем

$$\lim_{n \to \infty} (f(x_n) + g(x_n)) = y_1 + y_2, \quad \lim_{n \to \infty} (f(x_n)g(x_n)) = y_1 y_2,$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right) = \frac{y_1}{y_2}, \quad \text{если} \quad y_2 \neq 0.$$

Отсюда ввиду произвола в выборе последовательности $\{x_n\}$ и определения Гейне следует утверждение теоремы. $\triangleright$

ТЕОРЕМА 2.2. (i) *Пусть* $y = f(x)$ *и* $y = g(x)$ – *две функции с общей областью определения* $\mathcal{X}$. *Если* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_1 < \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_2$, *то найдется проколотая* δ-*окрестность* $\overset{\bullet}{O}{}^{\delta}_{x_0}$ *точки* x_0 *такая, что* $f(x) < g(x)\ \forall x \in \overset{\bullet}{O}{}^{\delta}_{x_0} \cap \mathcal{X}$.

(ii) *Пусть функции* $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = h(x)$ *с общей областью определения* $\mathcal{X}$ *таковы, что* $f(x) \le g(x) \le h(x)$. *Если* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = y_0$, *то* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_0$.

$\triangleleft$ (i) Возьмем $y' \in \mathbb{R}$ такое, что $y_1 < y' < y_2$. По определению Коши найдем проколотые δ-окрестности $\overset{\bullet}{O}{}^{\delta_1}_{x_0}$ и $\overset{\bullet}{O}{}^{\delta_2}_{x_0}$ такие, что

$$|f(x) - y_1| < y' - y_1 \quad \forall x \in \overset{\bullet}{O}{}^{\delta_1}_{x_0} \cap \mathcal{X},$$

$$|g(x) - y_2| < y_2 - y' \quad \forall x \in \overset{\bullet}{O}{}^{\delta_2}_{x_0} \cap \mathcal{X}.$$

Тогда

$$\forall x \in \overset{\bullet}{O}{}^{\delta}_{x_0} \cap \mathcal{X} \quad f(x) < (y' - y_1) + y_1 = y' = y_2 - (y_2 - y') < g(x).$$

Здесь $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

(ii) Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = y_0$, то $\forall \varepsilon > 0$ найдутся проколотые δ-окрестности $\overset{\bullet}{O}{}^{\delta_1}_{x_0}$ и $\overset{\bullet}{O}{}^{\delta_2}_{x_0}$ точки x_0 такие, что

$$y_0 - \varepsilon < f(x) < y_0 + \varepsilon \quad \forall x \in \overset{\bullet}{O}{}^{\delta_1}_{x_0} \cap \mathcal{X},$$

$$y_0 - \varepsilon < g(x) < y_0 + \varepsilon \quad \forall x \in \overset{\bullet}{O}{}^{\delta_2}_{x_0} \cap \mathcal{X}.$$

Тогда для всех $x \in \overset{\bullet}{O}{}^{\delta_1}_{x_0} \cap \overset{\bullet}{O}{}^{\delta_1}_{x_0} \cap \mathcal{X} := \overset{\bullet}{O}{}^{\delta}_{x_0} \cap \mathcal{X}$ имеем

$$y_0 - \varepsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) < y_0 + \varepsilon,$$

откуда $|g(x) - y_0| < \varepsilon$, что в силу определения Коши завершает доказательство. $\triangleright$

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Пусть* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_1$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_2$. *Если в некоторой проколотой окрестности* $\overset{\bullet}{O}_{x_0}$ *точки* x_0 *выполнено*

(i) $f(x) \ge g(x)$, *то* $y_1 \ge y_2$;

(ii) $f(x) > g(x)$, *то* $y_1 \geq y_2$;

(iii) $f(x) \geq c$, $c \in \mathbb{R}$, *то* $y_1 \geq c$;

(iv) $f(x) > c$, $c \in \mathbb{R}$, *то* $y_1 \geq c$.

$\triangleleft$ Рассуждая от противного, из утверждения (i) теоремы 2.2 немедленно получаем (i) и (ii). Утверждения (iii) и (iv) получаются из (i) и (ii) при $g(x) = c$. $\triangleright$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть заданы две функции $y = g(x)$ и $z = f(x)$, причем $\operatorname{im} g \subset \operatorname{dom} f$. Функцию $z = f \circ g(x)$, определенную по формуле $f \circ g(x) = f(g(x))$, будем называть *композицией* двух функций.

ТЕОРЕМА 2.3. *Пусть* $y = g(x)$, $z = f(x)$ – *две функции такие, что* $\operatorname{im} g \subset \operatorname{dom} f$. *Пусть, далее, существуют* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = y_0$ *и* $\lim\limits_{y \to y_0} f(y) = z_0$. *Если*

(i) $y_0 \notin \operatorname{dom} f$

или

(ii) $f(y_0) = z_0$,

то $\lim\limits_{x \to x_0} f \circ g(x) = z_0$

$\triangleleft$ (i) $y_0 \notin \operatorname{dom} f \Rightarrow y_0 \notin \operatorname{im} g$. Пусть $\{x_n\} \subset \operatorname{dom} f$ – произвольная последовательность такая, что $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $g(x_n) \to y_0$ и $g(x_n) \neq y_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Поэтому $f(g(x_n)) \to z_0$. В силу произвольности последовательности $\{x_n\}$ последнее означает, что $\lim\limits_{x \to x_0} f \circ g(x) = z_0$.

(ii) Если $z_0 = f(y_0)$, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta' > 0$ $(y \in O_{y_0}^{\delta'} \cap \operatorname{dom} f \Rightarrow f(y) \in O_{z_0}^{\varepsilon})$. (Здесь видно, что высказывание истинно не только для проколотых окрестностей точки y_0).

Так как $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = y_0$, то для δ' можно подобрать $\delta > 0$ такое, что $x \in \overset{\bullet}{O}{}_{x_0}^{\delta} \cap \operatorname{dom} g \Rightarrow g(x) \in O_{y_0}^{\delta'} \cap \operatorname{dom} f$, так как $\operatorname{im} g \subset \operatorname{dom} f$. Отсюда получаем, что если $x \in \overset{\bullet}{O}{}_{x_0}^{\delta} \cap \operatorname{dom} g$, то $f(g(x)) \in O_{z_0}^{\varepsilon}$. $\triangleright$

ЗАМЕЧАНИЯ. Ограничения (i) и (ii) существенны в теореме 2.3. В самом деле, пусть нарушается второе из ограничений. Для этого возьмем $f(y) = |\operatorname{sgn} y|$, $g(x) = x \sin x^{-1}$, $x_0 = y_0 = 0$. Получим $\lim\limits_{x \to 0} x \sin x^{-1} = 0$, $\lim\limits_{y \to 0} |\operatorname{sgn} y| = 1$. Однако предел функции $f \circ g$ в точке 0 не существует. Достаточно рассмотреть последовательности

$x_n = \frac{1}{\pi n}$, $x'_n = \frac{2}{\pi(4n+1)}$.

3.3 Критерий Коши существования предела функции

Определения по Гейне и по Коши предела функции в точке чересчур ограничительны, так как не охватывают всего многообразия ситуаций. Поэтому введем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.

(i) $(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = y_0) := (\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in \operatorname{dom} f\ (x > \delta \Rightarrow f(x) \in O^{\varepsilon}_{y_0}))$;

(i') $(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = y_0) := (\forall\{x_n\} \subset \operatorname{dom} f\ (\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y_0))$;

(ii) $(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = y_0) := (\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in \operatorname{dom} f\ (x < -\delta \Rightarrow f(x) \in O^{\varepsilon}_{y_0}))$;

(ii') $(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = y_0) := (\forall\{x_n\} \subset \operatorname{dom} f\ (\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y_0))$;

(iii) $(\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = y_0) := (\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in \operatorname{dom} f\ (|x| > \delta \Rightarrow f(x) \in O^{\varepsilon}_{y_0}))$;

(iii') $(\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = y_0) := (\forall\{x_n\} \subset \operatorname{dom} f\ (\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y_0))$.

УПРАЖНЕНИЕ. Доказать эквивалентность (i) и (i'), (ii) и (ii'), (iii) и (iii') в предыдущем определении. Исследовать связь введенных в этом определении понятий с арифметическими операциями и неравенствами. Доказать аналог теоремы о пределе композиции двух функций (теорема 3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. *Проколотой δ-окрестностью* $\pm\infty$ и ∞ назовем соответственно множества $\overset{\bullet}{O}{}^{\delta}_{+\infty}= \{x \in \mathbb{R} : x > \delta\}$, $\overset{\bullet}{O}{}^{\delta}_{-\infty}= \{x \in \mathbb{R} : x < -\delta\}$, $\overset{\bullet}{O}{}^{\delta}_{\infty}= \{x \in \mathbb{R} : |x| > \delta\}$.

Теперь у нас все готово для изучения критерия Коши. Изучение начнем с определения *условия Коши*:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Будем говорить, что функция $y = f(x)$ *удовлетворяет условию Коши при* $x \to x_0$ ($x_0 \in \mathbb{R}$ или $x_0 = \pm\infty, \infty$), если

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x', x'' \in \operatorname{dom} f \cap \overset{\bullet}{O}{}^{\delta}_{x_0} \Rightarrow (|f(x') - f(x'')| < \varepsilon).$$

ТЕОРЕМА 3.1 (критерий Коши). *Пусть* $x_0 \in \mathbb{R}$*, либо* $x_0 = \pm\infty, \infty$*. Предел* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *существует точно тогда, когда функция* $y = f(x)$ *удовлетворяет условию Коши при* $x \to x_0$*.*

$\triangleleft$ Пусть существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Тогда

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x', x'' \in \operatorname{dom} f \cap \overset{\bullet}{O}{}^{\delta}_{x_0}$$
$$(|f(x') - y_0| < \varepsilon/2) \wedge (|f(x'') - y_0| < \varepsilon/2).$$

Отсюда $|f(x') - f(x'')| \le |f(x') - y_0| + |f(x'') - y_0| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, то есть условие Коши выполнено.

Покажем теперь, что из условия Коши следует существование предела. Пусть

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x', x'' \in \operatorname{dom} f \cap \overset{\bullet}{O}{}^{\delta}_{x_0} \quad (|f(x') - f(x'')| < \varepsilon).$$

Рассмотрим последовательность $\{x_n\} \subset \operatorname{dom} f$ такую, что $x_n \ne x_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, и докажем, что последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится.

В силу критерия Коши для последовательностей из того, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, следует $(\forall\delta > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m > N\ (x_n, x_m \in \overset{\bullet}{O}{}^{\delta}_{x_0}))$. Стало быть, в силу условия Коши для произвольного $\varepsilon > 0$ мы нашли $N \in \mathbb{N}$ такое, что при любых $n, m > N$ $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. Это значит, в силу критерия Коши для последовательностей, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$.

Покажем, что все последовательности, выбранные указанным способом, сходятся к одному и тому же пределу. Рассмотрим для этого последовательность $\{f(x'_n)\}$, где $\{x'_n\} \subset \operatorname{dom} f \setminus \{x_0\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Тогда в силу условия Коши имеем, что при $n > N$ $|f(x_n) - f(x'_n)| < 1/N$ (если брать $\varepsilon = 1/N$). Откуда $f(x_n) - 1/N < f(x'_n) < f(x_n) + 1/N$. Переходя к пределу при $N \to \infty$ получим требуемое. $\triangleright$

Критерий Коши в том виде, в котором мы его доказали, очень неудобно применять на практике. Чтобы сформулировать его в более удобном виде дадим

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. *Колебанием функции* $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ на множестве $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ называется величина $\omega(f, \mathcal{X}) = \sup\limits_{x', x'' \in \mathcal{X}} |f(x') - f(x'')|$.

ПРИМЕРЫ

1. $\omega(\mathrm{sgn} x, [-1, 2]) = 2$;
2. $\omega(|\mathrm{sgn} x|, [-1, 2]) = 1$;
3. $\omega(|\mathrm{sgn} x|, \overset{\bullet\ \delta}{O}_0) = 0$.

Используя понятие колебания функции дадим иную запись критерия Коши:

$$(\exists \lim_{x \to x_0} f(x)) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad (\omega(f, \overset{\bullet\ \delta}{O}_{x_0}) < \varepsilon)).$$

3.4 Замечательные пределы и эквивалентные функции

Прежде чем приступить к доказательству *первого замечательного предела*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

напомним одно из свойств тригонометрических функций, положенных нами во Введении в основу их определения. Именно,

$$\forall x \in (0, \pi/2) \quad 0 < \sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}. \tag{4.1}$$

Посредством этого свойства докажем следующее утверждение:

ЛЕММА 4.1. *Для любого* $x_0 \in \mathbb{R}$ $(\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0 \wedge \lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0)$.

$\lhd$ Докажем сначала равенство $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$. Прежде заметим, что $|\sin x| \le |x|$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Действительно, в силу (4.1) при $x \in (0, \pi/2)$ имеем $0 < \sin x < x$, а при $x \in (-\pi/2, 0)$ имеем ввиду нечетность функции $\sin x$ $0 < \sin(-x) < -x$. Отсюда $|\sin x| \le |x|$, если $|x| \le \pi/2$. Если же $|x| \ge \pi/2$, то неравенство $|x| \ge |\sin x|$ справедливо в силу того, что $|\sin x| \le 1 < \pi/2 \le |x|$.

Теперь, если $x_0 = 0$, то $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$, поскольку для любой последовательности $\{x_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$ имеем $|x_n| \ge |\sin x_n| \ge 0$. В силу теоремы о пределе последовательности и неравенствах получаем $\lim\limits_{n \to \infty} |\sin x_n| = \lim\limits_{n \to \infty} \sin x_n = 0$.

Возьмем теперь произвольное число $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда для любой последовательности $\{x_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, получим

$$|\sin x_n - \sin x_0| = 2\left|\cos\frac{x_n + x_0}{2}\sin\frac{x_n - x_0}{2}\right| \le |x_n - x_0|.$$

Воспользовавшись предыдущими рассуждениями получим требуемое

Докажем, что $\lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$. Для этого заметим, что в силу теоремы о пределе композиции двух функций

$$\lim_{x\to x_0} \cos x = \lim_{x\to x_0} \sin(\pi/2 - x) =$$
$$= (\pi/2 - x = y, \quad x \to x_0 \Rightarrow y \to \pi/2 - x_0) =$$
$$= \lim_{y\to\pi/2 - x_0} \sin y = \sin(\pi/2 - x_0) = \cos x_0. \quad \triangleright$$

Перейдем теперь к доказательству первого замечательного предела.

$\triangleleft$ В силу (4.1) имеем $\forall x \in (0, \pi/2) \quad 0 < \sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$, откуда $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$. Другими словами, $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. Отметим, что последнее неравенство справедливо и при $\forall x \in (-\pi/2, 0)$ в силу четности функции $\cos x$ и нечетности функции $\sin x$. Переходя к пределу при $x \to 0$ в силу леммы и теоремы о пределе функции и неравенствах получаем требуемое. $\triangleright$

Теперь докажем *второй замечательный предел*

$$\lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x} = e.$$

$\triangleleft$ Напомним, что $e = \lim(1 + 1/n)^n$. В силу следствия из теоремы о верхнем и нижнем пределах имеем

$$\forall\{n_k\} \subset \{n\} \quad (\lim_{k\to\infty}(1 + 1/n_k)^{n_k} = e).$$

Фиксируем некоторую произвольную последовательность $\{x_k\}$ такую, что $(x_k > 0) \wedge (\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0)$. Рассмотрим последовательность $\{n_k = [1/x_k]\}$. Очевидно, что эта последовательность является подпоследовательностью последовательности $\{n\}$, причем $n_k + 1 > 1/x_k \ge n_k$, откуда имеем $\frac{1}{n_k} \ge x_k > \frac{1}{n_k+1}$. Поэтому

$$\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} \le (1 + x_k)^{1/x_k} < \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}. \tag{4.2}$$

Кроме того,

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{-1} = e.$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\left(1+\frac{1}{n_k}\right) = e.$$

В силу (4.2) и теоремы о предельном переходе и неравенствах получаем

$$\lim_{k\to\infty}(1+x_k)^{1/x_k} = e.$$

Теперь пусть $(x_k < 0) \wedge (\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0)$. Положим $y_k = -x_k$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = 0$, но $y_k > 0$. Далее,

$$\lim_{k\to\infty}(1+x_k)^{1/x_k} = \lim_{k\to\infty}(1-y_k)^{-1/y_k} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{y_k}{1-y_k}\right)^{1/y_k} =$$

$$\left(\frac{y_k}{1-y_k} = z_k > 0, \quad y_k \to 0 \Rightarrow z_k \to 0\right) = \lim_{k\to\infty}(1+z_k)^{1/z_k+1}.$$

Поэтому

$$\lim_{k\to\infty}(1+x_k)^{1/x_k} = \lim_{k\to\infty}(1+z_k)^{1/z_k}(1+z_k) = e$$

в силу уже доказанного. Апелляция к определению предела функции по Гейне завершает доказательство. $\rhd$

От обоих замечательных пределов самих по себе мало проку. Их возможности для вычисления других пределов значительно расширяет следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Две функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ называются *эквивалентными при* $x \to x_0$ ($f \sim g$ при $x \to x_0$), если $\forall x \in \overset{\bullet}{O}_{x_0}$ $f(x) = \alpha(x)g(x)$, причем $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 1$.

Покажем, что мы действительно определили эквивалентность, то есть

(i) $f \sim f$ при $x \to x_0$;

(ii) если $f \sim g$ при $x \to x_0$, то $g \sim f$ при $x \to x_0$;

(iii) если $(f \sim g) \wedge (g \sim h)$ при $x \to x_0$, то $f \sim h$ при $x \to x_0$.

$\lhd$ (i) Очевидно, поскольку $f(x) = \alpha(x)f(x)$, где $\alpha(x) = 1$.

(ii) Пусть $f \sim g$ при $x \to x_0$, то есть $f(x) = \alpha(x)g(x)$, где $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 1$. Это значит, что существует окрестность $\overset{\bullet}{O}_{x_0}$, где $\alpha(x) \neq 0$. В этой окрестности имеем $g(x) = \beta(x)f(x)$, где $\beta(x) = 1/\alpha(x)$, причем $\lim\limits_{x\to x_0} \beta(x) = \lim\limits_{x\to x_0} 1/\alpha(x) = 1$, то есть $g \sim f$ при $x \to x_0$.

(iii) Пусть $(f \sim g) \wedge (g \sim h)$ при $x \to x_0$, то есть $f(x) = \alpha(x)g(x)$, $g(x) = \beta(x)h(x)$, причем $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \beta(x) = 1$. Поэтому $f(x) = \gamma(x)h(x)$, где $\gamma(x) = \alpha(x)\beta(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} \gamma(x) = 1$, то есть $f \sim h$ при $x \to x_0$. $\triangleright$

ТЕОРЕМА 4.1. $x \sim \sin x \sim \arcsin x \sim \mathrm{tg}x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim \alpha^{-1}((1+x)^\alpha - 1)$ *при* $x \to 0$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$\triangleleft$ То, что $x \sim \sin x$ при $x \to x_0$, следует непосредственно из первого замечательного предела. Докажем остальное.

$$x \sim \arcsin x \quad \text{при} \quad x \to 0:$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = (\arcsin x = y, \quad x = \sin y, \quad (x \to 0) \Rightarrow (y \to 0)) =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = 1.$$

$$x \sim \mathrm{tg}x \quad \text{при} \quad x \to 0:$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1.$$

$$x \sim \ln(1+x) \quad \text{при} \quad x \to 0:$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{1/x} = \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right) = \ln e = 1.$$

(Здесь во втором равенстве мы воспользовались свойством непрерывности логарифмической функции

$$\lim_{x\to x_0} \ln x = \ln \lim_{x\to x_0} = \ln x_0, \quad x_0 > 0).$$

$$x \sim e^x - 1 \quad \text{при} \quad x \to 0:$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = (e^x = 1 + y, \quad x = \ln(1+y), \quad (x \to 0) \Rightarrow (y \to 0)) =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = 1$$

в силу доказанного выше.

$$(1+x)^\alpha \sim 1+\alpha x \quad \text{при} \quad x \to 0:$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{\alpha \ln(1+x)} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

в силу доказанного выше. $\rhd$

Понятие эквивалентности функций весьма полезно при вычислении пределов.

ТЕОРЕМА 4.2.*Если $f \sim f_1$ и $g \sim g_1$ при $x \to x_0$, то*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \tag{4.3}$$

при условии существования хотя бы одного из этих пределов.

$\lhd$ Поскольку $(f \sim f_1) \wedge (g \sim g_1)$ при $x \to x_0$, то в силу определения $f(x) = \alpha(x) f_1(x)$ и $g(x) = \beta(x) g_1(x)$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0, причем $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \beta(x) = 1$. Допустим, что существует правый предел в (4.3). Тогда заметим, что существует некоторая проколотая окрестность $\overset{\bullet}{O}_{x_0}$, в которой $g_1(x) \neq 0$ и $\beta(x) \neq 0$. В этой окрестности определена функция

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \frac{f_1(x)}{g_1(x)}, \quad \text{причем} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Отсюда в силу теоремы о пределе функции и арифметических операциях следует требуемое. $\rhd$

3.5 Символы Ландау o и O

Понятие эквивалентных функций чрезвычайно полезно при вычислении пределов, однако не охватывает всего многообразия возможных ситуаций. Чтобы расширить наши возможности, введем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$ или $x_0 = \pm\infty$, $x_0 = \infty$. Тогда

$$\text{(i)}(\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty) := \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \operatorname{dom} f \\ (x \in \overset{\bullet}{O}{}^{\delta}_{x_0} \Rightarrow f(x) \in \overset{\bullet}{O}{}^{\varepsilon}_{\infty}); \\ \forall \{x_n\} \subset \operatorname{dom} f \setminus \{x_0\} \\ (\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty); \end{cases}$$

$$\text{(ii)}(\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty) := \begin{cases} \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \in \operatorname{dom} f \\ (x \in \overset{\bullet}{O}{}^{\delta}_{x_0} \Rightarrow f(x) \in \overset{\bullet}{O}{}^{\varepsilon}_{\pm\infty}); \\ \forall\{x_n\} \subset \operatorname{dom} f \setminus \{x_0\} \\ (\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \pm\infty). \end{cases}$$

УПРАЖНЕНИЕ 5.1. Доказать эквивалентность определений бесконечного предела по Коши и по Гейне.

Перейдем к определению символов Ландау [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно малой при* $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$. Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно малой по сравнению с функцией* $y = g(x)$ *при* $x \to x_0$, если $f(x) = \alpha(x)g(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$. Обозначается это следующим образом: $f \sim o(g)$ (читается "о малое") при $x \to x_0$. Если $f \sim o(g)$ и $g(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$, то f будем называть *бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с* g *при* $x \to x_0$.

ПРИМЕР 5.1. $x^2 \sim o(x)$ при $x \to 0$, так как $x^2 = x \cdot x$.

ПРИМЕР 5.2. $x \sim o(x^2)$ при $x \to \infty$, так как $x = 1/x \cdot x^2$ при достаточно больших по модулю x.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.3. Будем говорить, что функция $y = f(x)$ *ограничена по сравнению с функцией* $y = g(x)$ *при* $x \to x_0$ (обозначается $f = O(g)$, читается "о большое от g"), если $\exists\ \overset{\bullet}{O}_{x_0}\ \exists c > 0$ $\forall x \in \overset{\bullet}{O}_{x_0}\ (|f(x)| \le c|g(x)|)$.

ПРИМЕР 5.3. $1/x = O(1/x^2)$ при $x \to 0$, так как $|1/x| \le 1/x^2$ при $|x| \le 1$.

ПРИМЕР 5.4. $1/x^2 = O(1/x)$ при $x \to \infty$, так как $1/x^2 \le |1/x|$ при $|x| \ge 1$.

Установим свойства o и O.

ТЕОРЕМА 5.1.*Пусть* $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *тогда при* $x \to x_0$

(i) $o_1(cf) = co_2(f) = o(f)$, $O_1(cf) = cO_2(f) = O(f)$;

(ii) $o_1(f) + o_2(f) = o(f)$, $O_1(f) + O_2(f) = O(f)$, $o(f) + O_1(f) = O(f)$;

(iii) $o_1(o_2(f)) = o(f)$, $o_1(O(f)) = o(f)$, $O(o_1(f)) = o(f)$, $O_1(O_2(f)) = O(f)$;

[1]Эдмунд Георг Герман Ландау (1877-1938) – немецкий математик, один из творцов современного математического анализа.

(iv) *если* $g(x) \neq 0$ $\forall x \in \overset{\bullet}{O}_{x_0}$, *то*

$$\frac{o_1(f)}{g} = o\left(\frac{f}{g}\right), \quad \frac{O_1(f)}{g} = O\left(\frac{f}{g}\right).$$

$\triangleleft$ (i) $o_1(cf) = \alpha(x)(c \cdot f(x)) = c\alpha(x) \cdot f(x) = (c \cdot \alpha(x)) \cdot f(x) = o(f)$, где $\alpha(x)$, $c \cdot \alpha(x)$ – бесконечно малые при $x \to x_0$.

Все недоказанные утверждения теоремы 5.1 предлагаются в качестве УПРАЖНЕНИЯ. $\triangleright$

ТЕОРЕМА 5.2 (критерий эквивалентности функций). *$f \sim g$ при $x \to x_0$) $\Leftrightarrow$ ($f(x) = g(x) + o(g)$ при $x \to x_0$).*

$\triangleleft$ Пусть $f(x) = \alpha(x)g(x)$ при $x \to x_0$, где $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 1$. Тогда $f(x) - g(x) = g(x)(\alpha(x) - 1) = \beta(x)g(x)$, где $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = 0$.

Теперь докажем утверждение в обратную сторону. Пусть $f(x) = g(x) + \alpha(x)g(x)$, где $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$. Стало быть, $f(x) = (1 + \alpha(x))g(x) = \beta(x)g(x)$, где $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = 1$. $\triangleright$

В силу доказанной теоремы и теоремы 4.1 можно записать следующую таблицу:

$$\left.\begin{array}{l} \sin x = x + o(x), \\ \mathrm{tg} x = x + o(x), \\ \arcsin x = x + o(x), \end{array}\right\} \quad x \to 0 \quad \left\{\begin{array}{l} e^x - 1 = x + o(x), \\ \ln(1 + x) = x + o(x), \\ (1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x). \end{array}\right.$$

3.6 Односторонние пределы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Интервал вида $(x_0, x_0 + \delta)$ ($(x_0 - \delta, x_0)$) называется *правой* (*левой*) *проколотой δ-окрестностью* точки x_0 ($x_0 \in \mathbb{R}$) и обозначается ${}^r\overset{\bullet}{O}{}^{\delta}_{x_0}$ (${}^l\overset{\bullet}{O}{}^{\delta}_{x_0}$). Другими словами

$${}^r\overset{\bullet}{O}{}^{\delta}_{x_0} = \{x \in \mathbb{R} : x_0 < x < x_0 + \delta\}, \quad {}^l\overset{\bullet}{O}{}^{\delta}_{x_0} = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - \delta < x < x_0\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$. *Правым пределом* функции

$y = f(x)$ при $x \to x_0$ называется

$$\left(\lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0+0)\right) := \begin{cases} \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \in \operatorname{dom} f \\ (x \in {}^r \overset{\bullet}{O}{}^{\delta}_{x_0} \Rightarrow f(x) \in \overset{\bullet}{O}{}^{\varepsilon}_{f(x_0+0)}); \\ \forall\{x_n\} \subset \operatorname{dom} f \\ ((x_n > x_0 \wedge \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0) \\ \Rightarrow (\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0+0))). \end{cases}$$

Левым пределом функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$ назовем

$$\left(\lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0-0)\right) := \begin{cases} \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \in \operatorname{dom} f \\ (x \in {}^l \overset{\bullet}{O}{}^{\delta}_{x_0} \Rightarrow f(x) \in \overset{\bullet}{O}{}^{\varepsilon}_{f(x_0-0)}); \\ \forall\{x_n\} \subset \operatorname{dom} f \\ ((x_n < x_0 \wedge \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0) \\ \Rightarrow (\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0-0))). \end{cases}$$

В данном определении величины $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$ могут быть либо действительными числами, либо символами ∞ и $\pm\infty$.

УПРАЖНЕНИЕ 6.1. Доказать эквивалентность определений по Гейне и по Коши односторонних пределов.

УПРАЖНЕНИЕ 6.2. Сформулировать и доказать теоремы о связи понятия одностороннего предела с арифметическими операциями и с неравенствами.

УПРАЖНЕНИЕ 6.3. Сформулировать и доказать критерий Коши существования одностороннего предела функции в точке и на бесконечности.

ПРИМЕР 6.1. Мы уже показывали, что функция $y = \operatorname{sgn} x$ в точке нуль не имеет предела. Однако левый и правый пределы у этой функции в точке нуль существуют. Действительно, по определению Гейне возьмем последовательность такую, что $x_n \to 0$ при $n \to \infty$, тогда

$$\lim_{x\to 0+} \operatorname{sgn} x = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn} x_n = 1, \quad \text{так как} \quad x_n > 0,$$
$$\lim_{x\to 0-} \operatorname{sgn} x = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn} x_n = -1, \quad \text{так как} \quad x_n < 0.$$

ПРИМЕР 6.2. Функция Дирихле

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{при} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

не имеет ни левого, ни правого пределов ни в одной точке. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty} D(x_n) = 1, \quad \text{если} \quad (x_n > x_0) \wedge (x_n \in \mathbb{Q}) \wedge (\lim_{n\to\infty} x_n = x_0),$$

$$\lim_{n\to\infty} D(x'_n) = 0, \quad \text{если} \quad (x'_n > x_0) \wedge (x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \wedge (\lim_{n\to\infty} x_n = x_0).$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to x_0+} \mathcal{D}(x)$ не существует. Аналогично показывается, что не существует $\lim\limits_{x\to x_0-} \mathcal{D}(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $x_0 = \infty$, то нетрудно заметить, что

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x), \quad \text{а} \quad \lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to -\infty} f(x).$$

ТЕОРЕМА 6.1 (критерий существования предела функции). *Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$ или $x_0 = \infty$, а $y_0 \in \mathbb{R}$ или $y_0 = \infty, \pm\infty$. Тогда*

$$(\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0) \Leftrightarrow (\lim_{x\to x_0-} f(x) = y_0) \wedge (\lim_{x\to x_0+} f(x) = y_0).$$

$\lhd$ Воспользуемся определениями Гейне. Пусть $\{x_n\} \subset \operatorname{dom} f \setminus \{x_0\}$. Разобьем ее на две подпоследовательности $\{x_n\} = \{x'_n\} \cup \{x''_n\}$, где $x'_n > x_0$, а $x''_n < x_0$. Очевидно,

$$(\lim_{n\to\infty} x_n = x_0) \Leftrightarrow (\lim_{n\to\infty} x'_n = x_0) \wedge (\lim_{n\to\infty} x''_n = x_0).$$

Отсюда следует утверждение теоремы. $\rhd$

Доказанная теорема и приведенные выше примеры не позволяют надеяться на существование левого и правого пределов у произвольно взятой функции. Однако существует довольно обширный класс функций, для которых вопрос о существовании односторонних пределов решается положительно.

Напомним, что функция $y = f(x)$ называется *монотонно возрастающей* (*монотонно убывающей*) на некотором множестве $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$, если $\forall x', x'' \in \mathcal{X}$, $x' < x''$ имеет место $f(x') \le f(x'')$ $(f(x') \ge f(x''))$. Множество *монотоннных функций* состоит из монотонно возрастающих и монотонно убывающих функций.

ТЕОРЕМА 6.2. *Пусть функция $y = f(x)$ монотонно возрастает на интервале (a, b). Тогда $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ существуют в каждой точке $x_0 \in (a, b)$. А именно, $\forall x_0 \in (a, b)$*

$$\sup_{a<x<x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0-} f(x) \le f(x_0) \le \lim_{x\to x_0+} f(x) = \inf_{x_0<x<b} f(x).$$

Кроме того, если $a < x_0' < x_0'' < b$, то

$$f(x_0'+0) = \lim_{x\to x_0'+} f(x) \le \lim_{x\to x_0''-} f(x) = f(x_0''-0).$$

$\lhd$ По предположению множество чисел $\{f(x) : a < x < x_0\}$ ограничено сверху числом $f(x_0)$ и поэтому имеет точную верхнюю грань $s(x_0)$. Очевидно, что $s(x_0) \le f(x_0)$. Покажем, что $s(x_0) = f(x_0-0)$. По заданному $\varepsilon > 0$ подберем $\delta > 0$ такое, что при $a < x_0 - \delta$ имеет место $s(x_0) - \varepsilon < f(x_0-\delta) \le s(x_0)$. Поскольку f монотонно возрастает, то

$$f(x_0-\delta) \le f(x) \le s(x_0) \quad \text{при} \quad x_0 - \delta < x < x_0.$$

Другими словами, $|f(x) - s(x_0)| < \varepsilon$ при $x \in {}^l\overset{\bullet}{O}{}^{\delta}_{x_0}$, то есть $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = s(x_0)$.

Вторая часть неравенства доказывается аналогично.

Далее, из доказанного неравенства

$$\sup_{a<x<x_0} f(x) = f(x_0-0) \le f(x_0+0) = \inf_{x_0<x<b} f(x)$$

имеем при $a < x_0' < x_0'' < b$

$$f(x_0'+0) = \inf_{x_0'<x<b} f(x) = \inf_{x_0'<x<x_0''} f(x).$$

С другой стороны

$$f(x_0''-0) = \sup_{a<x<x_0''} f(x) = \sup_{x_0'<x<x_0''} f(x).$$

Из сравнения двух последних равенств получаем требуемое. $\rhd$

УПРАЖНЕНИЕ 6.4. Сформулировать и доказать аналог теоремы 6.2 для монотонно убывающих функций.

3.7 Локальные свойства непрерывных функций. Классификация разрывов

Пусть $x_0 \in \operatorname{dom} f$. Напомним, что функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. (Другими словами, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$ при $x_0 \in \operatorname{dom} f$).

В силу теоремы 6.2 имеет место эквивалентное

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Пусть $x_0 \in \operatorname{dom} f$. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.2. Если функция не является непрерывной в точке $x_0 \in \operatorname{dom} f$, то мы будем говорить, что функция f *разрывна в точке* x_0, или что f *имеет разрыв в точке* x_0.

Как показано выше, функция Дирихле $y = \mathcal{D}(x)$ разрывна в каждой точке области определения. Введем в рассмотрение еще один экзотический

ПРИМЕР 7.1. Функция Римана $y = \mathcal{R}(x)$, где

$$\mathcal{R}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n} \quad - \quad \text{несократимая дробь}, \\ 0, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

непрерывна только в иррациональных точках. Действительно, каковы бы ни были число $x_0 \in \mathbb{R}$, ограниченная окрестность O_{x_0} и число $N \in \mathbb{N}$, в окрестности O_{x_0} есть только конечное число точек вида m/n, где $n < N$. Уменьшая окрестность O_{x_0} можно, таким образом, считать, что знаменатели всех рациональных чисел, попадающих в нее (кроме, может быть, числа x_0, если $x_0 \in \mathbb{Q}$) уже больше N. Таким образом, в любой точке $x_0 \in \overset{\bullet}{O}_{x_0}$ $|\mathcal{R}(x)| < 1/N$, то есть $\lim\limits_{x\to x_0} \mathcal{R}(x) = 0$.

ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА непрерывных функций:

(i) непрерывная в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ функция $y = f(x)$ локально ограничена;

(ii) если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывны в точке x_0, то их сумма $(f + g)(x)$, произведение $(f \cdot g)(x)$ и частное $(f/g)(x)$ (в случае $g(x_0) \neq 0$) тоже непрерывные в точке x_0 функции;

(iii) пусть $y = g(x)$ и $z = f(y)$ – две функции, причем $\operatorname{im} g \subset \operatorname{dom} f$, g непрерывна в точке x_0, а f непрерывна в точке $y_0 = g(x_0)$; тогда их композиция непрерывна в точке x_0.

Доказательство следует из соответствующих свойств предела функции в точке и определения непрерывности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.3. Функция, непрерывная в каждой точке некоторого промежутка, называется *непрерывной на* этом *промежутке*.

Функция, непрерывная в каждой точке области определения, называется *непрерывной.* Множество функций, непрерывных на множестве $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ обозначим символом $C(\mathcal{X})$.

Сформулируем важнейший результат МАТАН:

ТЕОРЕМА 7.1. *Элементарные функции непрерывны.*

$\lhd$ Напомним, что элементарными называются функции, полученные из степенных, показательных, логарифмических, тригонометрических и обратных тригонометрических функций посредством конечного числа арифметических операций и композиций. Во Введении мы так определили функции $y = e^x$ и $y = \ln x$, что они оказались непрерывными. Непрерывность функций $\sin x$ и $\cos x$ мы доказали выше. Непрерывность обратных тригонометрических функций мы установим далее. Все же остальные элементарные функции получены из перечисленных только что функций упомянутыми операциями. В силу локальных свойств непрерывных функций справедливо утверждение теоремы 7.1. $\rhd$

Охарактеризовав непрерывные функции перейдем к рассмотрению возможных разрывов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.4. Точка $x_0 \in \operatorname{dom} f$ называется точкой *устранимого разрыва*, если существуют левый и правый пределы $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, но они не равны значению функции $f(x_0)$. Точка $x_0 \in \operatorname{dom} f$ называется точкой *простого разрыва*, если левый и правый пределы существуют, но $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$. Устранимые и простые разрывы называются *разрывами первого рода*, все остальные разрывы – *разрывами второго рода.*

Функция $y = |\mathrm{sgn} x|$ имеет в точке нуль устранимый разрыв. Устранимые разрывы имеет функция Римана в каждой рациональной точке. Простой разрыв в точке нуль имеет функция $y = \mathrm{sgn} x$. Функция Дирихле в каждой точке имеет разрывы второго рода.

3.8 Глобальные свойства непрерывных функций

ТЕОРЕМА 8.1. (Больцано-Коши о промежуточном значении).

$$(f \in C[a, b] \wedge f(a) \cdot f(b) < 0) \Rightarrow (\exists c \in (a, b) \quad f(c) = 0).$$

$\lhd$ Делим отрезок $[a, b]$ пополам. Если в точке деления функция не равна нулю, то на концах одного из двух полученных в результате деления отрезков функция снова принимает значения разных знаков. Продолжая процесс деления и выбора отрезков, мы либо на каком-то шаге попадем в точку $c \in (a,b)$, где $f(c) = 0$, либо получим последовательность $\{I_n\}$ вложенных отрезков, длины которых стремятся к нулю. По принципу Коши - Кантора $\exists! c \in \mathbb{R}$ ($c \in I_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$). Рассмотрим последовательности $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$ концов отрезков I_n. Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = \lim\limits_{n\to\infty} x''_n = c$, причем $f(x'_n) < 0$, а $f(x''_n) > 0$. Отсюда в силу свойств предела имеем $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) \le 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n) \ge 0$. Поскольку f – непрерывная функция, то $f(c) = 0$. $\triangleright$

СЛЕДСТВИЕ 8.1. *Если функция $y = g(x)$ непрерывна на промежутке I, причем при $a, b \in I$ $g(a) = A \ne B = g(b)$, то для любого C, лежащего между A и B, найдется точка $c \in \mathbb{R}$, лежащая между a и b, в которой $g(c) = C$.*

$\triangleleft$ Рассмотрим функцию $f(x) = g(x) - C$. На отрезке $[a,b]$ $f(a) \cdot f(b) = (A - C) \cdot (B - C) < 0$ по построению. Кроме того, $f \in C[a,b]$. Значит, $\exists c \in (a,b)$ $(0 = f(c) = g(c) - C)$. $\triangleright$

ТЕОРЕМА 8.2 (Вейерштрасса о максимальном значении). *Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на нем. При этом на отрезке есть точка, где функция принимает максимальное значение, и есть точка, где она принимает минимальное значение.*

$\triangleleft$ Пусть $f \in C[a,b]$. Тогда $\forall x \in (a,b)$ $\exists O_x$ такая, что на $O_x \cap [a,b]$ функция f ограничена. Совокупность таких окрестностей O_x образует покрытие отрезка $[a,b]$ интервалами, из которого по принципу Бореля - Лебега можно выбрать конечное подпокрытие $\{O_{x_1}, \dots, O_{x_n}\}$, состоящее из интервалов, на каждом из которых $m_k \le f(x) \le M_k$, $k = 1, \dots, n$. Значит, $\forall x \in [a,b]$

$$\min\{m_1, \dots, m_n\} \le f(x) \le \max\{M_1, \dots, M_n\},$$

то есть функция f ограничена на $[a,b]$. Пусть теперь $s = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Предположим, что $f(x) < s$ $\forall x \in [a,b]$. Тогда непрерывная на $[a,b]$ функция $s - f(x) \ne 0$ $\forall x \in [a,b]$, хотя может принимать значения, сколь угодно близкие к нулю. Тогда функция $1/(s - f(x))$ непрерывна на $[a,b]$, но неограничена. Противоречие.

Итак, $\exists x_s \in [a,b]$ $(f(x_s) = s)$.

Аналогично, положив $i = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ и рассмотрев функцию

$f(x) - i$, покажем, что существует точка $x_i \in [a, b]$ $(f(x_i) = i)$. $\triangleright$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.1. Функция $y = f(x)$ *равномерно непрерывна на множестве* $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x', x'' \in \mathcal{X} \quad (|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon).$$

Обсудим понятие равномерной непрерывности.

(i) Если функция равномерно непрерывна на множестве, то она непрерывна на этом же множестве. Действительно, достаточно в определении зафиксировать одну точку, скажем $x' = x_0$, а другую положить $x'' = x$, и получим $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathcal{X}\ (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) := (\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0))$ – определение предела по Коши.

(ii) Из непрерывности, вообще говоря, не следует равномерная непрерывность.

ПРИМЕР 8.1. Функция $y = \sin(1/x)$ непрерывна на $(0, 1)$ как композиция элементарных функций. Однако в любой окрестности точки $x = 0$, лежащей в интервале $(0, 1)$, существуют точки, в которых функция принимает как значение -1, так и значение 1. (Именно, $x = \frac{2}{\pi(1+2k)}$, $k \in \mathbb{Z}$). Поэтому при любом $\varepsilon < 2$ для нее уже не выполнено условие равномерной непрерывности.

Полезно сравнить определения непрерывности и равномерной непрерывности функции, чтобы понять, откуда проистекает такое различие. В силу определения предела функции по Коши имеем: $y = f(x)$ непрерывна на $\mathcal{X} \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x_0 \in \mathcal{X}\ (\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)) \Leftrightarrow \forall x_0 \in \mathcal{X}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathcal{X}\ (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$.

Здесь число $\delta > 0$ выбирается в зависимости от точки $x_0 \in \mathcal{X}$ и от $\varepsilon > 0$, и поэтому при заданном $\varepsilon > 0$ может меняться от точки к точке. В случае же равномерной непрерывности гарантируется возможность выбора $\delta > 0$ только по числу $\varepsilon > 0$ так, что сразу для всех $x_0 \in \mathcal{X}$ из $|x - x_0| < \delta$ при $x \in \mathcal{X}$ будет следовать $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Если функция $y = f(x)$ неограничена в любой, например, правой окрестности точки $x \in \mathbb{R}$, то она не является равномерно непрерывной в этой окрестности, даже если непрерывна в ней. Действительно, при любом $\delta > 0$ в δ-окрестности $(x, x + \delta)$ точки x найдутся точки x', x'' такие, что $|x' - x''| < \delta$, но $|f(x') - f(x'')| > 1$. Так обстоит дело с функциями $y = 1/x$ и $y = \ln x$, рассматриваемыми в правой окрестности точки 0.

ПРИМЕР 8.2. Функция $y = \sin x^2$, непрерывная и ограниченная на $\mathbb{R}$, не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$, поскольку в точках $x'_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}(n+1)}$ и $x''_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}n}$ имеем $|f(x'_n) - f(x''_n)| = 1$, в то время как $\lim\limits_{n\to\infty} |x'_n - x''_n| = 0$.

После этого обсуждения понятия равномерной непрерывности и сопоставления равномерной непрерывности и непрерывности мы можем теперь оценить следующую теорему.

ТЕОРЕМА 8.3 (Кантора о равномерной непрерывности). *Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем.*

$\lhd$ Пусть $f \in C[a,b]$. Следовательно, $\forall x \in [a,b]\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ (x' \in O_x^{\delta(x)} \Rightarrow f(x') \in O_{f(x)}^{\varepsilon/2})$. Понятно, что δ зависит от $x \in [a,b]$. Интервалы $O_x^{\delta(x)/2}$ в совокупности образуют покрытие отрезка $[a,b]$. По принципу Бореля - Лебега выберем конечное подпокрытие $\{O_{x_1}^{\delta_1/2}, \ldots, O_{x_n}^{\delta_n/2}\}$ и возьмем $\delta = \frac{1}{2}\min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$. Покажем, что $\forall x', x'' \in [a,b]$ таких, что $|x' - x''| < \delta$ выполнено $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Действительно, система $\{O_{x_1}^{\delta_1/2}, \ldots, O_{x_n}^{\delta_n/2}\}$ покрывает отрезок $[a,b]$, поэтому найдется x_i такое, что $|x_i - x'| < \delta/2$. Отсюда

$$|x'' - x_i| \le |x'' - x'| + |x' - x_i| < \delta + \delta_i/2 \le \delta_i/2 + \delta_i/2 = \delta_i.$$

Следовательно, $x', x'' \in O_{x_i}^{\delta_i}$ и, значит,

$$|f(x') - f(x'')| \le |f(x') - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x'')| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \quad \rhd$$

3.9 Критерий непрерывности монотонной функции. Теорема об обратной функции

Сначала вернемся к теореме 6.2 и посмотрим на нее с точки зрения односторонних пределов. Очевидно

СЛЕДСТВИЕ 9.1 (из теоремы 6.2). *Монотонная функция не имеет разрывов второго рода.*

СЛЕДСТВИЕ 9.2 (из теоремы 6.2). *Множество точек разрыва монотонной функции не более, чем счетно.*

$\lhd$ Пусть для определенности $y = f(x)$ – монотонно возрастающая функция. Покажем, что она не имеет устранимых разрывов.

Действительно, в силу теоремы 6.2 и определения односторонних пределов, если $f(x-0) = f(x+0)$, то $f(x) = f(x-0) = f(x+0)$. В силу сказанного и следствия 9.1, монотонная функция может иметь только простые разрывы. Теперь пусть $\mathcal{X}$ – множество точек $\operatorname{dom} f$, в которых $f(x)$ разрывна. Каждой точке $x \in \mathcal{X}$ сопоставим рациональное число $r(x)$ так, что $f(x-0) < r(x) < f(x+0)$. Ясно, что отображение $r : \mathcal{X} \to \mathbb{Q}$ инъективно, то есть $r(x') \neq r(x'')$, если $x' < x''$, так как в силу теоремы 6.2 $f(x'+0) \leq f(x''-0)$.

Таким образом, установлено взаимно однозначное соответствие между $\mathcal{X}$ и некоторым подмножеством множества $\mathbb{Q}$, которое, как мы знаем, счетно. $\rhd$

ТЕОРЕМА 9.1. *Функция $y = f(x)$, монотонная на отрезке $[a, b]$, непрерывна на нем точно тогда, когда $f[[a, b]]$ есть отрезок с концами $f(a)$ и $f(b)$.*

$\lhd$ Пусть монотонная функция $f \in C[a, b]$. Ввиду монотонности все ее значения лежат между $f(a)$ и $f(b)$. Ввиду непрерывности и следствия 8.1 она принимает все значения между $f(a)$ и $f(b)$. Таким образом, $f[[a, b]]$ – отрезок с концами $f(a)$ и $f(b)$.

Пусть f – монотонная на отрезке $[a, b]$ функция, и пусть $c \in [a, b]$ – точка разрыва. Тогда по теореме 6.2 по крайней мере один из интервалов $(f(c-0), f(c))$ или $(f(c), f(c+0))$ не пуст и не содержит значений функции f. Но в силу монотонности этот интервал содержится в отрезке с концами $f(a)$ и $f(b)$, поэтому если монотонная на $[a, b]$ функция имеет хотя бы одну точку разрыва, то весь отрезок с концами $f(a)$ и $f(b)$ не может лежать в области значений $\operatorname{im} f$. $\rhd$

ЛЕММА 9.1. *Строго монотонная на множестве $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ функция $y = f(x)$ обладает на множестве $f[\mathcal{X}]$ обратной функцией $x = f^{-1}(y)$, имеющей тот же характер монотонности, что и функция $y = f(x)$.*

$\lhd$ Отображение $f : \mathcal{X} \to f[\mathcal{X}]$ сюръективно. Покажем, что оно инъективно. Действительно, $(f(x') = f(x'')) \Leftrightarrow (x' = x'')$ в силу строгой монотонности для любых $x', x'' \in \mathcal{X}$. Поскольку $f : \mathcal{X} \to f[\mathcal{X}]$ биективно, то существование обратного отображения $f^{-1} : f[\mathcal{X}] \to \mathcal{X}$ доказано. Исследуем характер монотонности $x = f^{-1}(y)$. Пусть для определенности f строго монотонно возрастает,

то есть
$$\forall x', x'' \in \mathcal{X} \quad (x' < x'' \Leftrightarrow f(x') < f(x'')).$$
Пользуясь определением f^{-1}, имеем
$$\forall y', y'' \in f[\mathcal{X}] \quad (f^{-1}(y') < f^{-1}(y'') \Leftrightarrow y' < y'').$$

Случай с монотонно убывающей функцией рассматривается аналогично. $\triangleright$

ТЕОРЕМА 9.2. *Строго монотонная и непрерывная на отрезке* $[a, b]$ *функция обладает на отрезке с концами* $f(a)$ *и* $f(b)$ *строго монотонной и непрерывной обратной функцией* $x = f^{-1}(y)$*, имеющей тот же характер монотонности.*

$\triangleleft$ Ввиду леммы строго монотонная на $[a, b]$ функция $y = f(x)$ обладает на $f[[a, b]]$ обратной функцией $x = f^{-1}(y)$, имеющей тот же характер монотонности, что и f. Ввиду монотонности и непрерывности функции $y = f(x)$ из теоремы 9.1 следует, что $f[[a, b]]$ – отрезок с концами $f(a)$ и $f(b)$. Пусть для определенности $f[[a, b]] = [f(a), f(b)]$. Поскольку $f^{-1}[[f(a), f(b)]] = f^{-1} \circ f[[a, b]] = [a, b]$, то в силу монотонности функции $x = f^{-1}(y)$ и теоремы 9.1 эта функция непрерывна на отрезке с концами $f(a), f(b)$. $\triangleright$

ПРИМЕР 9.1. Функция $y = \sin x$ возрастает и непрерывна на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$. Значит, по теореме 9.2 существует возрастающая непрерывная функция $x = \arcsin y$ на отрезке $[\sin(-\pi/2), \sin(\pi/2)] = [-1, 1]$.

ПРИМЕР 9.2. Аналогично предыдущему сужение функции $y = \cos x$ на отрезок $[0, \pi]$ строго монотонно убывает от 1 до -1. Поэтому на отрезке $[-1, 1]$ существует обратная непрерывная строго монотонно убывающая от π до 0 функция $x = \arccos y$.

ПРИМЕР 9.3. Пользуясь предыдущими примерами, нетрудно построить непрерывную строго монотонно возрастающую от $-\pi/2$ до $\pi/2$ функцию $x = \mathrm{arctg} y$, а также построить непрерывную строго монотонно убывающую от π до 0 функцию $x = \mathrm{arcctg} y$.

ПРИМЕР 9.4. Функция $y = \mathrm{sh} x$ строго монотонно возрастает на всей числовой оси и непрерывна. В силу теоремы 9.2 она обладает обратной непрерывной строго монотонно возрастающей функцией $x = \mathrm{arsh} y$.

Поскольку исходная функция $y = \mathrm{sh}x$ выражается через показательную функцию, то не исключена возможность, что и обратная функция $x = \mathrm{arsh}y$ выразится через логарифмы. Действительно,

$$y = \mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Отсюда получаем квадратное уравнение $e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$. Поскольку $e^x \neq y - \sqrt{y^2+1} < 0$, то получаем окончательно $x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$.

ПРИМЕР 9.5. Аналогично используя монотонность функции $y = \mathrm{ch}x$ на участках $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$, можно построить функции

$$\left.\begin{array}{l} x = \mathrm{arch}_+ y = \ln(y + \sqrt{y^2-1}) \\ x = \mathrm{arch}_- y = \ln(y - \sqrt{y^2-1}) \end{array}\right\} \quad y \geq 1,$$

обратные к функции $y = \mathrm{ch}x$. Обычно, как и в случае функции $y = \sqrt{x}$, используют только верхнюю ветвь, обозначая ее $x = \mathrm{arch}y = \ln(y + \sqrt{y^2-1})$, $y \geq 1$.

ПРИМЕР 9.6. Применяя описанную выше процедуру к функциям $y = \mathrm{th}x$ и $y = \mathrm{cth}x$, получаем

$$x = \mathrm{arth}y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}, \quad |y| < 1;$$

$$x = \mathrm{arcth}y = \frac{1}{2}\ln\frac{y+1}{y-1}, \quad |y| > 1.$$

4 ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ

Разве я вас не знаю? Знаю как свои пять пальцев.
Марк Твен "Приключения Гекльберри Финна"

4.1 Производная функции в точке и ее смысл

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. *Производной функции* $y = f(x)$ *в точке* $x \in \operatorname{dom} f$, предельной для множества $\operatorname{dom} f$, называется конечный предел
$$\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = f'_x, \quad t \in \operatorname{dom} f.$$
Иногда этот предел записывается в другом виде:
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x},$$
где $\Delta x = t - x$, $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$; при данной записи Δx (читается "дельта икс") называется *приращением аргумента*, а Δf – *приращением функции*. Функция, имеющая производную в точке x, называется *дифференцируемой в точке* x; функция, дифференцируемая $\forall x \in \mathcal{X}$, называется дифференцируемой на множестве $\mathcal{X}$; функция, дифференцируемая $\forall x \in \operatorname{dom} f$, называется *дифференцируемой*.

ПРИМЕР 1.1. Функция $y = e^x$ – дифференцируемая. Действительно,
$$(e^x)'_x = \lim_{t\to x}\frac{e^t-e^x}{t-x} = e^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = e^x$$
в силу второго замечательного предела.

ПРИМЕР 1.2. Функция $y = \ln|x|$ – дифференцируемая. Действительно,
$$(\ln|x|)'_x = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln|x+\Delta x|-\ln|x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{\ln\left|1+\frac{\Delta x}{x}\right|}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x},$$
в силу эквивалентности соответствующих функций.

ПРИМЕР 1.3. Функция $y = \sin x$ тоже дифференцируема. Действительно,
$$(\sin x)'_x = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}=\cos x$$

в силу первого замечательного предела.

ПРИМЕР 1.4. Постоянная функция $y=c$ дифференцируема:

$$\lim_{t\to x}\frac{c-c}{t-x}=0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. *Односторонними производными* будем называть *левую производную*

$$f'_{x-}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

и *правую производную*

$$f'_{x+}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Из соответствующего свойства предела сразу следует

ТЕОРЕМА 1.1. *Функция f в точке x дифференцируема точно тогда, когда левая и правая производные функции f в точке x существуют и равны, при этом*

$$f'_x=f'_{x-}=f'_{x+}.$$

Установим связь между понятиями дифференцируемости и непрерывности.

ТЕОРЕМА 1.2. *Из дифференцируемости функции в точке следует ее непрерывность в этой точке.*

$\triangleleft$ Допустим, что функция f разрывна в точке x, то есть $\lim\limits_{t\to x}(f(t)-f(x))=a\neq 0$. Тогда, очевидно, конечного предела $\lim\limits_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ существовать не может, так как $\lim\limits_{t\to x}(t-x)=0$. $\triangleright$

ПРИМЕР 1.5. Рассмотрим непрерывную функцию $y=|x|$. Найдем ее односторонние производные в нуле:

$$\lim_{t\to 0-}\frac{|t|-|0|}{t-0}=\lim_{t\to 0-}(-1)=-1,$$

$$\lim_{t\to 0+}\frac{|t|-|0|}{t-0}=\lim_{t\to 0+}1=1,$$

так как в первом случае $t < 0$, а во втором $t > 0$. Из теоремы 1.1 следует, что функция $y = |x|$ не дифференцируема в точке $x = 0$, хоть и непрерывна в ней. Этот факт показывает, что из непрерывности функции в точке дифференцируемость не следует.

ПРИМЕР 1.6. Рассмотрим *механический смысл производной*, который изначально лежал в основе этого понятия при возникновении дифференциального исчисления. Пусть материальная точка движется по оси y, и закон ее движения описывается дифференцируемой функцией от времени $y = f(t)$. Тогда производная $\dot{f}(t_0)$ этой функции (точкой сверху принято обозначать производную по времени t) в точке t_0 имеет смысл мгновенной скорости в момент времени t_0.

Напишем уравнение секущей AB:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x_0 + \Delta x - x_0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}(x - x_0) + f(x_0).$$

Геометрическая интуиция нам подсказывает, что при стремлении $\Delta x \to 0$ секущая должна превратиться в касательную, если она в точке x_0 существует.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, тогда прямую $y = f'_{x_0}(x - x_0) + f(x_0)$ назовем *касательной* к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$.

Таким образом, *геометрический смысл производной* заключается в том, что производная функции в точке равна тангенсу угла между касательной к графику этой функции в данной точке и положительным направлением оси Ox. В случае, когда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \pm\infty$$

можно считать производную тангенсом угла наклона к оси Ox вертикальной прямой $x = x_0$. Таким образом определяется *бесконечная производная* (иногда добавляют: *определенного знака*) функции f в точке x_0.

4.2 Производная и арифметические операции. Производная композиции функций. Производная обратной функции

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ определены в окрестности точки x и дифференцируемы в этой точке. Тогда функции cf, $f+g$, $f\cdot g$, f/g (последняя при условии $g(x) \neq 0$) тоже дифференцируемы в точке x, причем*

$$(cf)'_x = cf'_x, \quad (f+g)'_x = f'_x + g'_x,$$
$$(f\cdot g)'_x = f'_x \cdot g + f\cdot g'_x, \quad (f/g)'_x = \frac{f'_x g - f g'_x}{g^2}.$$

$$\triangleleft \quad (cf)'_x = \lim_{t\to x} \frac{(cf)(t) - (cf)(x)}{t-x} = \lim_{t\to x} c\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = cf'_x.$$

$$(f+g)'_x = \lim_{t\to x} \frac{(f+g)(t) - (f+g)(x)}{t-x} =$$
$$\lim_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} + \lim_{t\to x} \frac{g(t)-g(x)}{t-x} = f'_x + g'_x.$$

$$(f\cdot g)'_x = \lim_{t\to x} \frac{(f\cdot g)(t) - (f\cdot g)(x)}{t-x} =$$
$$= \lim_{t\to x} \frac{f(t)g(t) - f(x)g(t) + f(x)g(t) - f(x)g(x)}{t-x} =$$
$$\lim_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}\cdot g(t) + \lim_{t\to x} f(x)\frac{g(t)-g(x)}{t-x} = f'_x g(x) + f(x) g'_x,$$

поскольку $\lim\limits_{t\to x} g(t) = g(x)$ в силу непрерывности функции g в точке x.

$$(f/g)'_x = \lim_{t\to x} \frac{(f/g)(t) - (f/g)(x)}{t-x} =$$

$$= \lim_{t\to x} \frac{1}{g(t)g(x)} \left(\frac{f(t)-f(x)}{t-x} g(x) - f(x) \frac{g(t)-g(x)}{t-x} \right) =$$
$$= \frac{f'_x g(x) - f(x) g'_x}{(g(x))^2},$$

учитывая непрерывность функции g в точке x. $\triangleright$

ЛЕММА 2.1. *Пусть существует* $\lim\limits_{t\to x} f(t) = y$. *Тогда* $f(t) = y + \alpha(t)$, *где* $\alpha(t)$ *– бесконечно малая при* $t \to x$.

$\triangleleft$ Положим $\alpha(t) = f(t) - y$. Тогда в силу определения предела

$$(\lim_{t\to x} f(t) = y) \Leftrightarrow (\lim_{t\to x} \alpha(t) = 0). \quad \triangleright$$

В следующей теореме $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ – открытые множества из $\mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 2.2. *Пусть функция* $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *дифференцируема в точке* $x \in \mathcal{X}$, *а функция* $g : \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ *дифференцируема в точке* $y = f(x) \in \mathcal{Y}$. *Тогда композиция функций* $g \circ f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ *тоже дифференцируема в точке* $x \in \mathcal{X}$, *причем*

$$(g \circ f)'_x = g'_y \cdot f'_x.$$

$\triangleleft$ Из дифференцируемости функции f в точке $x \in \mathcal{X}$ следует, что

$$f(t) - f(x) = (t - x)(f'_x + \alpha(t)).$$

Поскольку функция g дифференцируема в точке $y = f(x) \in \mathcal{Y}$, то

$$g(s) - g(y) = (s - y)(g'_y + \beta(s)).$$

Теперь

$$(g \circ f)(t) - (g \circ f)(x) = g(f(t)) - g(f(x)) =$$
$$(f(t) - f(x))(g'_y + \beta(f(t))) = (t - x)(f'_x + \alpha(t))(g'_y + \beta(f(t))).$$

Откуда

$$\frac{(g \circ f)(t) - (g \circ f)(x)}{t - x} = (f'_x + \alpha(t)) \cdot (g'_y + \beta(f(t))) =$$
$$g'_y \cdot f'_x + \alpha(t) g'_y + \beta(f(t)) f'_x + \alpha(t)\beta(f(t)).$$

Вычислим пределы

$$\lim_{t\to x} \alpha(t) g'_y = 0 \cdot g'_y = 0, \quad \lim_{t\to x} \beta(f(t)) f'_x = f'_x \cdot \lim_{s\to y} \beta(s) = f'_x \cdot 0 = 0.$$

Поскольку $\lim\limits_{t\to x} f(t) = y$, то

$$\lim_{t\to x}\alpha(t)\beta(f(t)) = \lim_{t\to x}\alpha(t)\cdot\lim_{s\to y}\beta(s) = 0.$$

Поэтому

$$\lim_{t\to x}\frac{(g\circ f)(t)-(g\circ f)(x)}{t-x} = g'_y f'_x. \quad \triangleright$$

ПРИМЕР 2.1. Используя предыдущие теоремы, вычислим производные основных элементарных функций.

$$(x^\alpha)'_x = \left(e^{\alpha\ln x}\right)'_x = e^{\alpha\ln x}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1};$$

$$(a^x)'_x = \left(e^{x\ln a}\right)'_x = e^{x\ln a}\cdot\ln a = a^x\ln a;$$

$$(\log_a|x|)'_x = \left(\frac{\ln|x|}{\ln a}\right)'_x = \frac{1}{x\ln a};$$

$$(\cos x)'_x = (\sin(\pi/2-x))'_x = \cos(\pi/2-x)\cdot(-1) = -\sin x;$$

$$(\mathrm{tg}x)'_x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'_x = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\mathrm{ctg}x)'_x = (\mathrm{tg}^{-1}x)'_x = -\frac{1}{\mathrm{tg}^2x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(\mathrm{sh}x)'_x = \left(\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{-x}\right)'_x = \frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x} = \mathrm{ch}x;$$

$$(\mathrm{ch}x)'_x = \left(\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}\right)'_x = \frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{-x} = \mathrm{sh}x;$$

$$(\mathrm{th}x)'_x = \left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}\right)'_x = \frac{\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x}{\mathrm{ch}^2x} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2x};$$

$$(\mathrm{cth}x)'_x = \left(\frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}\right)'_x = \frac{\mathrm{sh}^2x-\mathrm{ch}^2x}{\mathrm{sh}^2x} = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2x}.$$

ТЕОРЕМА 2.3. *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна на отрезке $[x_0-\delta, x_0+\delta]$, причем $f'_{x_0}\neq 0$. Тогда функция $x = f^{-1}(y)$, обратная к функции $y = f(x)$, дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$, причем*

$$(f^{-1})'_{y_0} = \frac{1}{f'_{x_0}}.$$

$\triangleleft$ Пусть для определенности функция f строго монотонно возрастает на отрезке $[x_0-\delta, x_0+\delta]$. Обозначим $\alpha = f(x_0-\delta)$, $\beta = f(x_0+\delta)$. По теореме об обратной функции на отрезке $[\alpha, \beta]$ определена функция f^{-1}, непрерывная и строго монотонно возрастающая, причем $y_0 = f(x_0) \in (\alpha, \beta)$. Возьмем Δy настолько малым, что $y_0 + \Delta y \in (\alpha, \beta)$. Обозначим $\Delta x = f^{-1}(y_0+\Delta) - f^{-1}(y_0)$ и найдем предел

$$\lim_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}.$$

Заметим, что если $\Delta y \neq 0$, то и $\Delta x \neq 0$, так как в противном случае $f^{-1}(y_0+\Delta y) = f^{-1}(y_0)$, что противоречит свойству строгого монотонного возрастания функции f^{-1}. Поэтому при $\Delta y \neq 0$ справедливо

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Пусть $\Delta y \to 0$, тогда $\Delta x \to 0$, так как функция $x = f^{-1}(y)$ непрерывна в точке x_0. Поэтому

$$(f^{-1})'_{y_0} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'_{x_0}}. \quad \triangleright$$

ПРИМЕР 2.2. По теореме 2.3 функции $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$ дифференцируемы при $-1 < x < 1$, а функции $y = \mathrm{arctg} x$ и $y = \mathrm{arcctg} x$ дифференцируемы на всей числовой прямой. Найдем производные этих функций. При $y = \arcsin x$, $x = \sin y$. Отсюда

$$(\arcsin x)'_x = \frac{1}{(\sin y)'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Знак перед радикалом выбран с учетом того, что $\cos y > 0$ при $|y| < \pi/2$.

Аналогично получаем

$$(\arccos x)'_x = \frac{1}{(\cos y)'_y} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\mathrm{arctg} x)'_x = \frac{1}{(\mathrm{tg} y)'_y} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(\mathrm{arcctg} x)'_x = \frac{1}{(\mathrm{ctg} y)'_y} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2};$$

$$(\text{arsh}x)'_x = \frac{1}{(\text{sh}y)'_y} = \frac{1}{\text{ch}y} = \frac{1}{\sqrt{\text{sh}^2 y + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}};$$

$$(\text{arch}x)'_x = \frac{1}{(\text{ch}y)'_y} = \frac{1}{\text{sh}y} = \frac{1}{\sqrt{\text{ch}^2 y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}};$$

$$(\text{arth}x)'_x = \frac{1}{(\text{th}y)'_y} = \text{ch}^2 y = \frac{1}{1-\text{th}^2 y} = \frac{1}{1-x^2};$$

$$(\text{arcth}x)'_x = \frac{1}{(\text{cth}y)'_y} = -\text{sh}^2 y = -\frac{1}{\text{cth}^2 y - 1} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Как следствие теорем о производной композиции двух функций и о производной обратной функции получим утверждение о производной *функции, заданной параметрически.* Пусть функции $y = y(t)$ и $x = x(t)$ определены на отрезке $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, $\delta > 0$, причем функция $x = x(t)$ непрерывна и строго монотонна. Тогда на отрезке с концами $\alpha = x(t_0 - \delta)$ и $\beta = x(t_0 + \delta)$ определена обратная функция $t = t(x)$, непрерывная и строго монотонная.

Предположим дополнительно, что существуют производные y'_{t_0} и x'_{t_0}, причем $x'_{t_0} \neq 0$. Тогда производная функции $y(x) = y(t(x))$ имеет вид

$$y'_{x_0} = \frac{y'_{t_0}}{x'_{t_0}}, \quad \text{где} \quad x_0 = x(t_0).$$

Действительно, по теореме о дифференцировании композиции двух функций имеем

$$y'_{x_0} = y'_{t_0} \cdot t'_{x_0} = \frac{y'_{t_0}}{x'_{t_0}},$$

где $t'_{x_0} = 1/x'_{t_0}$ согласно теореме о дифференцировании обратной функции.

Другим, более важным для нас следствием из доказанных теорем является следующий результат:

ТЕОРЕМА 2.4. *Элементарные функции дифференцируемы на любом интервале, лежащем в области определения.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы о непрерывности элементарных функций и потому опускается.

4.3 Основные теоремы о дифференцируемых функциях

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Точка $x_0 \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ называется *точкой локального максимума* (*минимума*), а значения функции в ней *локальным максимумом* (*минимумом*) функции $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, если существует окрестность $O_{x_0} \subset \mathbb{R}$ такая, что $f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) \geq f(x_0))$ $\forall x \in O_{x_0} \cap \mathcal{X}$. Точки локального максимума и локального минимума называются точками *локального экстремума*, а значения функции в них – *локальными экстремумами.*

ПРИМЕР 3.1.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x \leq 2, \\ 4, & x > 2 \end{cases}$$

Для этой функции $x = -1, x = 2$ – точки локального максимума; $x = 0$ – точка локального минимума; $x > 2$ – точки экстремума, являющиеся одновременно точками локального максимума и локального минимума, поскольку здесь функция локально постоянна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Точку $x_0 \in \mathcal{X}$ локального экстремума функции $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ будем называть *точкой внутреннего экстремума*, если существует окрестность точки x_0, целиком лежащая в $\mathcal{X}$.

В рассмотренном выше примере все точки экстремумов за исключением точки $x = -1$ являются точками внутренних экстремумов.

ТЕОРЕМА 3.1 (теорема Ферма о локальном экстремуме). *Пусть функция $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ дифференцируема во внутренней точке локального экстремума x_0. Тогда $f'_{x_0} = 0$.*

$\triangleleft$ По определению производной в точке x_0 имеем

$$f(x) - f(x_0) = (f'_{x_0} + \alpha(x))(x - x_0),$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$. Пусть для определенности x_0 – точка внутреннего минимума, тогда левая часть равенства неотрицательна $\forall x \in O_{x_0} \subset \mathcal{X}$.

Пусть теперь $f'_{x_0} \neq 0$. Тогда ввиду бесконечной малости функции $\alpha(x)$ при $x \to x_0$ найдется окрестность O'_{x_0} такая, что при всех $x \in O'_{x_0}$ выражение $f'_{x_0} + \alpha(x)$ будет иметь тот же знак, что и f'_{x_0}.

Значит, при всех $x \in O'_{x_0} \cap O_{x_0} \setminus \{x_0\}$ выражение $(f'_{x_0} + \alpha(x))(x - x_0)$ будет менять знак в зависимости от выбора $x > x_0$ или $x < x_0$, а выражение $f(x) - f(x_0) \geq 0$ по предположению. Противоречие. $\triangleright$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Теорема Ферма дает только необходимое условие существования экстремума дифференцируемой функции, причем только во внутренней точке. Для невнутренних экстремумов (как точка $x = -1$ в рассмотренном выше примере) утверждение о том, что $f'_{x_0} = 0$, вообще говоря, не верно.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Геометрически теорема вполне очевидна, ибо она утверждает, что в точке локального экстремума дифференцируемой функции касательная к ее графику горизонтальна.

ТЕОРЕМА 3.2 (теорема Ролля[1]). *Пусть функция $f \in C[a, b]$ дифференцируема на интервале (a, b) и $f(a) = f(b)$. Тогда $\exists \xi \in (a, b)$ $f'_\xi = 0$.*

$\triangleleft$ Поскольку $f \in C[a, b]$, то по теореме Вейерштрасса существуют точки $x_m, x_M \in [a, b]$, в которых функция принимает минимальное и максимальное значения. Если $f(x_m) = f(x_M)$, то функция f постоянна на $[a, b]$ и, следовательно, $f'_\xi = 0$ $\forall \xi \in (a, b)$. Если же $f(x_m) < f(x_M)$, то поскольку $f(a) = f(b)$, то одна из точек должна лежать в интервале (a, b). Ее мы и обозначим через ξ. По теореме Ферма $f'_\xi = 0$. $\triangleright$

ТЕОРЕМА 3.3 (формула конечных приращений Лагранжа). *Пусть функция $f \in C[a, b]$ дифференцируема на (a, b). Тогда*

$$\exists \xi \in (a, b) \quad f(b) - f(a) = f'_\xi (b - a).$$

$\triangleleft$ Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

$F \in C[a, b]$ и F дифференцируема на (a, b), причем

$$F(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a) = F(a).$$

Поэтому в силу теоремы Ролля $\exists \xi \in (a, b)$ такая, что

$$F'_\xi = f'_\xi - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0. \quad \triangleright$$

[1] Мишель Ролль (1652-1719) – французский математик, автор исследований по математическому анализу.

Доказанная теорема имеет наглядный геометрический смысл: величина
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
есть угловой коэффициент наклона прямой AB к оси Ox. Поскольку f'_ξ есть тангенс угла наклона касательной к графику $y = f(x)$ в точке $(\xi, f(\xi))$, то утверждение теоремы сводится к утверждению о существовании касательной, параллельной секущей AB.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Между характером монотонности дифференцируемой на интервале* (a, b) *функции* $y = f(x)$ *и ее производной* f'_x, $x \in (a, b)$, *имеется следующая взаимосвязь:*

$$f'_x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \quad \text{монотонно возрастает;}$$

$$f'_x = 0 \Leftrightarrow f(x) \quad \text{постоянна;}$$

$$f'_x \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \quad \text{монотонно убывает.}$$

$\triangleleft$ Пусть $x', x'' \in (a, b)$, причем $x' < x''$. По теореме Лагранжа

$$\exists x \in (x', x'') \quad f'_x = \frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'}.$$

Поскольку $f'_x \geq 0$ $\forall x \in (a, b)$, то $f(x'') \geq f(x')$ $\forall x', x'' \in (a, b)$, $x' < x''$, поэтому функция f монотонно возрастает. Аналогично исследуется случаи $f'_x = 0$ и $f'_x \leq 0$.

Пусть теперь дифференцируемая на (a, b) функция f монотонно возрастает. Тогда

$$\forall x \in (a, b) \quad f'_x = \lim_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{t\to x} \varphi(t).$$

В силу монотонного возрастания f функция $\varphi(t) \geq 0$ $\forall t \in (a, b)$. Поэтому $\lim\limits_{t\to x} \varphi(t) \geq 0$ в силу теоремы о пределе функции и неравенствах. Аналогично исследуются другие случаи. $\triangleright$

ТЕОРЕМА 3.4 (формула Коши конечных приращений). *Пусть* $x = x(t)$ *и* $y = y(t)$ *– две функции, непрерывные на отрезке* $[\alpha, \beta]$ *и дифференцируемые на интервале* (α, β), *причем* $x'_t \neq 0$ $\forall t \in (\alpha, \beta)$. *Тогда*
$$\exists \tau \in (\alpha, \beta) \quad \frac{y(\beta)-y(\alpha)}{x(\beta)-x(\alpha)} = \frac{y'_\tau}{x'_\tau}.$$

◁ Покажем сначала, что $x(\alpha) \neq x(\beta)$. Если бы это было не так, то по теореме Ролля в некоторой точке $t \in (\alpha, \beta)$ производная функции $x(t)$ обращалась бы в нуль. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(t) = y(t) - y(\alpha) - \frac{y(\beta) - y(\alpha)}{x(\beta) - x(\alpha)}(x(t) - x(a)).$$

Эта функция непрерывна на $[\alpha, \beta]$ и дифференцируема на (α, β). Кроме того, $F(\alpha) = F(\beta) = 0$. По теореме Ролля существует точка $\tau \in (\alpha, \beta)$ такая, что

$$F'_\tau = y'_\tau - \frac{y(\alpha) - y(\beta)}{x(\alpha) - x(\beta)}x'_\tau = 0.$$

Учитывая, что $x'_\tau \neq 0$, из последнего равенства получим формулу Коши. ▷

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Формула Лагранжа конечных приращений есть частный случай формулы Коши при $x(t) = t$.

4.4 Формула Тейлора

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 все производные до порядка n включительно. *Формулой Тейлора*[1] называется представление функции f в виде

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'_{x_0}}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}_{x_0}}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x_0; x),$$

где $r_n(x_0; x)$ – *остаточный член формулы Тейлора.* При $x_0 = 0$ формулу Тейлора часто называют *формулой Маклорена*[2]

ТЕОРЕМА 4.1. *Если на отрезке с концами x и x_0 функция f непрерывна вместе с первыми своими n производными, а во внутренних точках этого отрезка она имеет производную порядка $n+1$, то при любой функции φ, непрерывной на этом отрезке и имеющей отличную от нуля производную в его внутренних точках, найдется точка ξ, лежащая между x и x_0, такая, что*

$$r_n(x_0; x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'_\xi n!} f^{(n+1)}_\xi (x - \xi)^n.$$

[1] Брук Тейлор (1685-1731) – английский математик, философ, автор ряда работ по математическому анализу.

[2] Колин Маклорен (1698-1746) – шотландский математик, автор ряда работ по теории рядов.

◁ На отрезке I с концами x, x_0 рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(t) = f(x) - \left(f(t) + \frac{f'_t}{1!}(x-t) + \dots + \frac{f_t^{(n)}}{n!}(x-t)^n \right).$$

Функция F непрерывна на отрезке I и дифференцируема в его внутренних точках, причем

$$F'_t = -\left(f'_t + \frac{f''_t}{1!}(x-t) + \dots + \frac{f_t^{(n+1)}}{n!}(x-t)^n \right) +$$

$$\left(f'_t + \frac{f''_t}{1!}(x-t) + \dots + \frac{f_t^{(n)}}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} \right) = -\frac{f_t^{(n+1)}}{n!}(x-t)^n.$$

Применяя к паре функций $F(t)$ и $\varphi(t)$ на отрезке I формулу Коши конечных приращений, получаем

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{F'_\xi}{\varphi'_\xi},$$

где ξ – некоторая точка между x и x_0. Подставляя сюда выражение для F'_ξ и замечая, что

$$F(x) - F(x_0) = 0 - F(x_0) = -r_n(x_0; x),$$

получаем требуемое. ▷

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Полагая $\varphi(t) = x - t$, получаем *остаточный член в форме Коши*

$$r_n(x_0; x) = \frac{1}{n!} f_\xi^{(n+1)} (x - \xi)^n (x - x_0).$$

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Положим $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$ и получим *остаточный член в форме Лагранжа*

$$r_n(x_0; x) = \frac{1}{(n+1)!} f_\xi^{(n+1)} (x - x_0)^{n+1}.$$

ЛЕММА 4.1. *Пусть $f(x) = P_n(x_0; x) + o((x-x_0)^n)$ при $x \to x_0$, где $P_n(x_0; x) = c_0 + c_1(x-x_0) + \dots + c_n(x-x_0)^n$. Тогда коэффициенты многочлена P_n определяются единственным образом.*

$\triangleleft$ В силу единственности предела имеем

$$c_0 = \lim_{x\to x_0} f(x); \quad c_1 = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - c_0}{x - x_0}; \ldots;$$

$$c_n = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - (c_0 + c_1(x - x_0) + \cdots + c_{n-1}(x - x_0)^{n-1})}{(x - x_0)^n}. \quad \triangleright$$

ЛЕММА 4.2. *Пусть функция $\varphi : I \to \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ – отрезок с концом x_0) такова, что имеет в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ все производные до порядка n включительно, причем $\varphi(x_0) = \varphi'_{x_0} = \varphi''_{x_0} = \cdots = \varphi^{(n)}_{x_0} = 0$. Тогда $\varphi(x) = o((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0$.*

$\triangleleft$ Доказательство проведем методом математической индукции.

Пусть $n = 1$. Тогда в силу дифференцируемости функции φ в точке x_0 имеем

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'_{x_0}(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0),$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$. Поскольку $\varphi(x_0) = \varphi'_{x_0} = 0$, то $\varphi(x) = o(x - x_0)$.

Предположим, что утверждение доказано при $n = k \geq 1$. Докажем, что оно справедливо и при $n = k + 1$. Поскольку

$$\varphi^{(k+1)}_{x_0} = \left(\varphi^{(k)}_{x_0}\right)'_{x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi^{(k)}_x - \varphi^{(k)}_{x_0}}{x - x_0},$$

то существование $\varphi^{(k+1)}_{x_0}$ предполагает, что функция $\varphi^{(k)}_x$ определена на I хотя бы вблизи точки x_0. Уменьшая, если нужно, отрезок I, можно заранее считать, что функции $\varphi(x), \varphi'_x, \ldots, \varphi^{(k)}_x$, где $k \geq 1$, определены на всем I с концом x_0. Поскольку $k \geq 1$, то функция φ'_x существует и удовлетворяет условиям

$$(\varphi'_x)'_{x_0} = \cdots = \left(\varphi^{(k)}_x\right)'_{x_0} = 0.$$

По предположению индукции $\varphi'_x = o((x - x_0)^k)$ при $x \to x_0$. Тогда из формулы Лагранжа следует

$$\varphi(x) = \varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'_\xi(x - x_0) = \alpha(\xi)(\xi - x_0)^k(x - x_0),$$

где ξ – точка, лежащая между x и x_0 (то есть $|\xi - x_0| < |x - x_0|$) и зависящая от x, причем $\alpha(\xi(x))$ – бесконечно малая при $x \to x_0$. Поэтому из неравенства

$$|\varphi(x)| \leq |\alpha(\xi)| \cdot |x - x_0|^k \cdot |x - x_0|$$

получаем, что $\varphi(x) = o((x-x_0)^{k+1})$. $\triangleright$

ТЕОРЕМА 4.2. *Пусть I – отрезок с концом $x_0 \in \mathbb{R}$. Если функция $f : I \to \mathbb{R}$ имеет в точке x_0 все производные до порядка n включительно, то справедлива формула*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'_{x_0}}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}_{x_0}}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

при $x \to x_0$.

$\triangleleft$ Поскольку многочлен $P_n(x_0; x)$ согласно лемме 4.1 определяется единственным образом, то мы введем в рассмотрение функцию

$$\varphi(x) = f(x) - \left(f(x_0) + \frac{f'_{x_0}}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f'_{x_0}}{n!}(x-x_0)^n\right).$$

Очевидно, $\varphi(x_0) = \varphi'_{x_0} = \cdots = \varphi^{(n)}_{x_0} = 0$. По лемме 4.2 $\varphi(x) = o((x-x_0)^n)$. $\triangleright$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Формула, установленная в теореме 4.2, называется формулой Тейлора с *остаточным членом в форме Пеано*[1].

Итак мы получили важнейшие формулы математического анализа:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'_{x_0}}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}_{x_0}}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}_{\xi}}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad -$$

формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, и

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'_{x_0}}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}_{x_0}}{n!}(x-x_0)^n + ((x-x_0)^n)$$

при $x \to x_0$ – формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Первая удобна для практических расчетов, вторая при исследовании асимптотического поведения функций. Различие этих формул Тейлора более глубокое. Одна локальная (в форме Пеано), а другая глобальная (в форме Лагранжа или Коши). Первая дает информацию о поведении функции лишь при $x \to x_0$. Вторую можно применять для оценок на больших отрезках.

Обращаясь к таблице производных порядка n напишем формулу Тейлора при $x_0 = 0$ для основных элементарных функций.

[1]Джузеппе Пеано (1858-1932) – итальянский математик, исследователь оснований математики.

ПРИМЕР 4.1. Пусть $f(x) = e^x$, тогда $f_0^{(n)} = 1$. Поэтому

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

ПРИМЕР 4.2. Пусть $f(x) = \sin x$, тогда

$$f_0^{(n)} = \sin\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2m, \\ (-1)^m, & n = 2m+1, \end{cases} \qquad m \in \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

Поэтому

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots + \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \frac{\sin(\xi + \frac{\pi}{2}(n+1))}{(n+1)!}x^{n+1},$$

где $n = 2m+1$ или $n = 2m+2$.

ПРИМЕР 4.3. Пусть $f(x) = \cos x$, тогда

$$f_0^{(n)} = \cos\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2m+1, \\ (-1)^m, & n = 2m, \end{cases} \qquad m \in \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

Поэтому

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots + \frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m} + \frac{\cos(\xi + \frac{\pi}{2}(n+1))}{(n+1)!}x^{n+1},$$

$n = 2m$ или $n = 2m+1$.

ПРИМЕР 4.4. Пусть $f(x) = \ln(1+x)$, тогда $f_0^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!$. Поэтому

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}}.$$

ПРИМЕР 4.5. Пусть $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда $f_0^{(n)} = \alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - n + 1)$. Поэтому

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n +$$
$$\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!} \cdot \frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1-\alpha}}.$$

В приведенных примерах остаточный член приведен в форме Лагранжа. Применение остаточного члена в формах Пеано или Коши не вызовет затруднений.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Из формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа следует асимптотическая формула вида

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'_{x_0}}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}_{x_0}}{n!}(x - x_0)^n + O((x - x_0)^{n+1})$$

при $x \to x_0$.

4.5 Достаточное условие экстремума функции. Выпуклость и вогнутость функции

Теорема Ферма, как отмечалось, дает лишь необходимые условия экстремума. Поэтому актуальна следующая

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть* $f : O_{x_0} \to \mathbb{R}$ *функция, определенная в некоторой окрестности* O_{x_0} *точки* x_0*, непрерывная в точке* x_0 *и дифференцируемая в проколотой окрестности* $\overset{\bullet}{O}_{x_0}$*. Пусть* $\overset{\bullet}{O}_{x_0} = {}^l\overset{\bullet}{O}_{x_0} \cup {}^r\overset{\bullet}{O}_{x_0}$ *(левая и правая окрестности). Тогда*

(i) *если* $(\forall x \in \overset{\bullet}{O}_{x_0} \quad (f'_x < 0)) \vee (\forall x \in \overset{\bullet}{O}_{x_0} \quad (f'_x > 0))$*, то функция* f *в точке* x_0 *экстремума не имеет;*

(ii) *если* $(\forall x \in {}^l\overset{\bullet}{O}_{x_0} \quad (f'_x < 0)) \wedge (\forall x \in {}^r\overset{\bullet}{O}_{x_0} \quad (f'_x > 0))$*, то функция* f *в точке* x_0 *имеет локальный минимум;*

(iii) *если* $(\forall x \in {}^l\overset{\bullet}{O}_{x_0} \quad (f'_x > 0)) \wedge (\forall x \in {}^r\overset{\bullet}{O}_{x_0} \quad (f'_x < 0))$*, то функция* f *в точке* x_0 *имеет локальный максимум.*

$\lhd$ (i) Выберем для определенности вариант $(\forall x \in \overset{\bullet}{O}_{x_0} \ (f'_x < 0))$. Он равносилен $(\forall x \in {}^l\overset{\bullet}{O}_{x_0} \ (f'_x < 0)) \wedge (\forall x \in {}^r\overset{\bullet}{O}_{x_0} \ (f'_x < 0))$. На ${}^l\overset{\bullet}{O}_{x_0}$ и ${}^r\overset{\bullet}{O}_{x_0}$ в силу теоремы Лагранжа функция f строго монотонно убывает. Поскольку f непрерывна в точке x_0, то $\forall x' \in {}^l\overset{\bullet}{O}_{x_0}$ $\forall x'' \in {}^r\overset{\bullet}{O}_{x_0}$

$$f(x') > \lim_{x' \to x_0-} f(x') = f(x_0) = \lim_{x'' \to x_0+} f(x'') > f(x'').$$

Поэтому точка x_0 не может быть точкой локального экстремума. Аналогично рассматривается и другой вариант.

(ii) В силу теоремы Лагранжа на ${}^l\overset{\bullet}{O}_{x_0}$ функция f строго монотонно убывает, а на ${}^r\overset{\bullet}{O}_{x_0}$ строго монотонно возрастает. Поскольку в точке x_0 функция f непрерывна, то имеем $\forall x' \in {}^l \overset{\bullet}{O}_{x_0}$ $\forall x'' \in {}^r \overset{\bullet}{O}_{x_0}$

$$f(x') > \lim_{x' \to x_0-} f(x') = f(x_0) = \lim_{x'' \to x_0+} f(x'') < f(x''),$$

то есть x_0 – точка локального минимума.

Случай (iii) рассматривается аналогично (ii). ⊳

Доказанная теорема обходится весьма скромными условиями – непрерывностью функции в точке предполагаемого экстремума и дифференцируемостью в проколотой окрестности этой точки. Если мы располагаем более богатой информацией о функции f в точке x_0, то и результаты могут быть сформулированы более весомые.

ТЕОРЕМА 5.2. *Пусть функция $y = f(x)$, определенная в окрестности O_{x_0} точки $x_0 \in \mathbb{R}$, имеет в x_0 все производные до порядка $n \in \mathbb{N}$ включительно. Если $f'_{x_0} = \dots = f^{(n-1)}_{x_0} = 0$ и $f^{(n)}_{x_0} \neq 0$, то при нечетном n в точке x_0 экстремума функции нет, а при n четном в случае $f^{(n)}_{x_0} > 0$ – в точке x_0 локальный минимум функции f, а в случае $f^{(n)}_{x_0} < 0$ – локальный максимум.*

⊲ Применим формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}_{x_0}}{n!}(x - x_0)^n + \alpha(x)(x - x_0)^n,$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$. Запишем эту формулу в виде

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{n!}(f^{(n)}_{x_0} + \beta(x))(x - x_0)^n,$$

где $\beta(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$, и будем рассуждать, как при доказательстве теоремы Ферма. Если $f^{(n)}_{x_0} \neq 0$, то при x достаточно близких к x_0 знак выражения $f^{(n)}_{x_0} + \beta(x)$ будет совпадать со знаком $f^{(n)}_{x_0}$. Значит, если n – нечетное, то при переходе через x_0 знак выражения $(f^{(n)}_{x_0} + \beta(x))(x - x_0)^n$ будет меняться, а при четном n – не будет, то есть знак этого выражения будет совпадать со знаком $f^{(n)}_{x_0}$. ⊳

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ называется *выпуклой*, если $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_+$ $(\alpha_1 + \alpha_2 = 1)$ имеет место неравенство $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$.

Геометрически условие выпуклости функции $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ означает, что точки любой дуги графика лежат ниже хорды, стягивающей эту дугу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ называется *вогнутой*, если $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_+$ $(\alpha_1 + \alpha_2 = 1)$ имеет место неравенство $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$.

Нетрудно заметить, что точки дуги графика вогнутой функции лежат выше хорды, стягивающей эту дугу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.3. Выпуклая (вогнутая) на интервале (a, b) функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ называется *строго выпуклой* (*строго вогнутой*), если при $x_1 \neq x_2$ в определении 5.1 (5.2) имеет место строгое неравенство, то есть

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) < \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

$$(f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) > \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)).$$

ТЕОРЕМА 5.3. *Дифференцируемая на интервале* (a, b) *функция* $y = f(x)$ *выпукла на нем точно тогда, когда производная* f'_x *монотонно возрастает на* (a, b). *При этом строгому монотонному возрастанию* f'_x *соответствует строгая выпуклость.*

$\triangleleft$ Пусть $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ дифференцируема и выпукла на (a, b). Тогда из соотношений $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ имеем

$$\alpha_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad \alpha_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Теперь условие выпуклости можно записать в виде

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Откуда получаем

$$(x_2 - x) f(x_1) + (x_1 - x_2) f(x) + (x - x_1) f(x_2) \geq 0.$$

Теперь заметим, что $(x_2 - x_1) = (x_2 - x) + (x - x_1)$, поэтому получим

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

при $x_1 < x < x_2$. Полученное неравенство есть другая форма записи условия выпуклости функции. Устремим x сначала к x_1, а затем к x_2. Последовательно получим

$$f'_{x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'_{x_2},$$

откуда следует монотонный рост производной f'_x.

Учитывая это, для строго выпуклой функции из теоремы Лагранжа следует

$$f'_{x_1} \leq f'_{\xi_1} = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'_{\xi_2} \leq f'_{x_2},$$

где $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$, то есть строгая выпуклость влечет строгую монотонность производной.

Теперь пусть f'_x на (a, b) монотонно (строго монотонно) возрастает. Тогда для $a < x_1 < x < x_2 < b$ по теореме Лагранжа

$$f'_{\xi_1} = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq (<) \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'_{\xi_2},$$

где $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$. $\triangleright$

СЛЕДСТВИЕ 5.1. *Функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, имеющая на интервале (a, b) вторую производную, выпукла на нем точно тогда, когда $f''_x \geq 0$. Из условия $f''_x > 0$ следует строгая выпуклость.*

$\triangleleft$ Для доказательства достаточно следствие к теореме Лагранжа применить к функции f'_x. $\triangleright$

Аналогично формулируются и доказываются результаты для вогнутой функции.

ТЕОРЕМА 5.4. *Дифференцируемая на интервале (a, b) функция $y = f(x)$ вогнута на нем точно тогда, когда производная f'_x монотонно убывает на (a, b). При этом строгому монотонному убыванию f'_x соответствует строгая вогнутость.*

СЛЕДСТВИЕ 5.2. *Функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, имеющая на интервале (a, b) вторую производную, вогнута на нем точно тогда, когда $f''_x \leq 0$. Из условия $f''_x < 0$ следует строгая вогнутость.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.4. Пусть $f : O_{x_0} \to \mathbb{R}$ – функция, определенная в окрестности O_{x_0} точки $x_0 \in \mathbb{R}$. Если на множестве $^l \overset{\bullet}{O}_{x_0}$

функция f вогнута (выпукла), а на множестве ${}^{r}\overset{\bullet}{O}_{x_0}$ функция f выпукла (вогнута), то точка графика $(x_0, f(x_0))$ называется *точкой перегиба.*

Таким образом, если в точке перегиба x_0 функция f дважды дифференцируема, то в силу теорем 5.3, 5.4 и теоремы Ферма необходимо, чтобы $f''_{x_0} = 0$. Если же вторая производная определена в проколотой окрестности $\overset{\bullet}{O}_{x_0}$ точки x_0 и в ${}^{l}\overset{\bullet}{O}_{x_0}$ имеет один знак, а в ${}^{r}\overset{\bullet}{O}_{x_0}$ противоположный, то x_0 является точкой перегиба.

4.6 Правило Лопиталя

Весьма полезной бывает при вычислении пределов следующая

ТЕОРЕМА 6.1 (правило Лопиталя[1]). *Пусть функции* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *и* $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *дифференцируемы на интервале* (a, b) $(-\infty \le a < b \le +\infty)$, *причем* $g'_x \ne 0$, $x \in (a, b)$, *и*

$$\lim_{x \to a+} \frac{f'_x}{g'_x} = A \quad (-\infty \le A \le +\infty).$$

Тогда при выполнении любого из следующих двух условий

(i) $(\lim\limits_{x \to a+} f(x) = 0) \wedge (\lim\limits_{x \to a+} g(x) = 0)$,

(ii) $\lim\limits_{x \to a+} g(x) = \infty$

будет выполнятся равенство

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Аналогичное утверждение справедливо и при $x \to b-$.

$\triangleleft$ Предположим сначала, что $A < +\infty$, и фиксируем числа p и q так, чтобы $A < p < q$. Поскольку $\lim\limits_{x \to a+} \frac{f'_x}{g'_x} = A$, то существует точка $c \in (a, b)$ такая, что при любом $x \in (a, c)$ будет $f'_x/g'_x < p < q$. Так как $g'_x \ne 0$ на (a, b), то $g(x)$ строго монотонна на (a, b), и потому, выбрав точку $c_1 \in (a, c)$ достаточно близкой к точке a, можно считать, что $g(x) \ne 0$ на интервале (a, c_1). Поэтому при любых $x, y \in (a, c_1)$, $y < x$ по теореме Коши о приращениях имеем

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'_\xi}{g'_\xi},$$

[1] Гийом Франсуа Антуан де Лопиталь (1661-1704) – французский математик

где $\xi \in (y,x) \subset (a,c_1)$. Отсюда

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} < p, \tag{6.1}$$

если $x, y \in (a, c_1)$.

Теперь рассмотрим обе возможности:

– в случае (i), переходя в предыдущем неравенстве к пределу при $y \to a+$, получим

$$\frac{f(x)}{g(x)} \le p < q, \quad x \in (a, c_1);$$

– в случае (ii), фиксируя y и беря x достаточно близким к a, имеем

$$\frac{g(x)-g(y)}{g(x)} = 1 - \frac{g(y)}{g(x)} > 0. \tag{6.2}$$

Домножая неравенство (6.1) на положительное число (6.2), получим

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)} < p\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right),$$

или

$$\frac{f(x)}{g(x)} < p - p\frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)}.$$

Выбрав $c_2 \in (a, c_1)$ достаточно близким к a, для любого $x \in (a, c_2)$ имеем

$$\frac{f(x)}{g(x)} < p - p\frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} < q.$$

Итак, в обоих случаях (i) и (ii) существует интервал (a, c_q), в любой точке которого $f(x)/g(x) < q$.

Если $A = -\infty$, то в силу произвола в выборе $q > A$ теорема в этом случае доказана.

Если $A = +\infty$, то взяв $\tilde{q}$ и $\tilde{p}$ так, чтобы $\tilde{q} < \tilde{p} < A$, аналогично предыдущему найдем интервал $(a, c_{\tilde{q}})$, в любой точке которого $\tilde{q} < f(x)/g(x)$, то есть $\lim\limits_{x\to a+} f(x)/g(x) = +\infty$.

Если $A \in \mathbb{R}$, то для любой пары чисел $\tilde{q} < A < q$ найдем интервал $(a, c_{\tilde{q}}) \cap (a, c_q)$, в любой точке которого будем иметь

$$\tilde{q} < \frac{f(x)}{g(x)} < q, \quad \text{то есть} \quad \lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = A. \quad \triangleright$$

4.7 Неопределенный интеграл. Простейшие приемы интегрирования

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Пусть функции $y = F(x)$ и $y = f(x)$ определены на некотором промежутке (a, b), причем функция F дифференцируема на этом промежутке. Если

$$\forall x \in (a, b) \quad F'_x = f(x), \tag{7.1}$$

то функция $F(x)$ называется *первообразной для функции* $f(x)$ на промежутке (a, b).

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Нетрудно заметить, что первообразная $F(x)$ функции $f(x)$ определяется неоднозначно. Действительно, если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то функция $\Phi(x) = F(x) + C$, где C константа, тоже будет первообразной, поскольку

$$(\Phi(x))'_x = (F(x) + C)'_x = F'_x + C'_x = F'_x = f(x).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.2. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ на некотором промежутке (a, b) называют *неопределенным интегралом от функции* $f(x)$ на этом промежутке, обозначают символом

$$\int f(x)dx$$

и пишут

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \tag{7.2}$$

Здесь $F(x)$ – какая-нибудь первообразная функции $f(x)$ на промежутке (a, b), C – произвольная постоянная. Знак " $\int$ " называют *знаком интеграла*, функцию $f(x)$ – *подинтегральной функцией*, выражение $f(x)dx$ – *подинтегральным выражением.*

Подинтегральное выражение можно записать в виде дифференциала $F'_x dx = dF(x)$, то есть

$$f(x)dx = dF(x). \tag{7.3}$$

Операцию нахождения неопределенного интеграла от данной функции, которая является обратной к операции дифференцирования, называют *интегрированием.* Поэтому любую формулу для производной, то есть формулу вида (7.1), можно записать в виде (7.2).

Используя формулы для производных можно записать *таблицу интегралов*:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1; \quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1; \quad \int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C; \quad \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C; \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C;$$

$$\int \mathrm{sh} x dx = \mathrm{ch} x + C; \quad \int \mathrm{ch} x dx = \mathrm{sh} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg} x + C = -\mathrm{arcctg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{arcsin} x + C = -\mathrm{arccos} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} dx = \mathrm{th} x + C; \quad \int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} dx = -\mathrm{cth} x + C.$$

Теперь сформулируем основные свойства неопределенного интеграла

СВОЙСТВО 1.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

$\lhd$ Из равенств (7.2) и (7.3) следует, что

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x) + C) = dF(x) = f(x)dx,$$

так как $dC = 0$. $\rhd$

СВОЙСТВО 2.

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

$\lhd$ Свойство сразу следует из (7.2) и (7.3). $\rhd$

СВОЙСТВО 3. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют на некотором промежутке (a, b) первообразные, то для любых чисел α и β функция $\alpha f(x) + \beta g(x)$ тоже имеет первообразную на (a, b), причем*

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx.$$

$\triangleleft$ Пусть $F(x)$ и $G(x)$ – первообразные для функций f и g соответственно. Тогда $\alpha F(x) + \beta G(x)$ – первообразная для функции $\alpha f(x) + \beta g(x)$, поскольку

$$(\alpha F(x) + \beta G(x))'_x = \alpha F'_x + \beta G'_x = \alpha f(x) + \beta g(x). \quad \triangleright$$

Таким образом, интегрирование обладает свойством *линейности*: интеграл от линейной комбинации функций равен соответствующей линейной комбинации от рассматриваемых функций.

Перейдем к простейшим методам интегрирования. Начнем с *метода замены переменного.*

ТЕОРЕМА 7.1. *Пусть функция $y = f(x)$ определена и дифференцируема на промежутке Δ и пусть $\tilde{\Delta}$ – множество значений функции $f(x)$ на Δ. Если функция $g(y)$ имеет первообразную $G(y)$ на $\tilde{\Delta}$, то существует первообразная функции $g(f(x))f'(x)$ на промежутке Δ, причем имеет место каждое из следующих двух эквивалентных тождеств*

$$\int g(f(x))f'(x)dx = G(f(x)) + C, \tag{7.4}$$

$$\int g(f(x))df(x) = G(f(x)) + C. \tag{7.5}$$

$\triangleleft$ Действительно, в условиях теоремы на промежутке Δ определена и дифференцируема сложная функция $F(x) = G(f(x))$ и

$$F'_x = G'_y(f(x)) \cdot f'_x = g(y)f'_x.$$

Отсюда следует, что если $G(y)$ – первообразная функции $g(y)$, то $G(f(x))$ – первообразная функции $g(f(x)) \cdot f'_x$. $\triangleright$

Формулу (7.4) (или формулу (7.5)) называют *формулой интегрирования заменой переменного.* Отметим важные частные случаи этой формулы.

СЛЕДСТВИЕ 7.1. (i) *Если*

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(ax+b)dx = \int f(ax+b)\frac{1}{a}d(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b) + C;$$

$$\text{(ii)} \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C;$$

$$\text{(iii)} \int (f(x))^\alpha f'(x)dx = \int (f(x))^\alpha df(x) = \frac{(f(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$$

На студенческом жаргоне метод замены переменного называют еще "загнать под дифференциал"(функцию $f(x)$). Рассмотрим примеры, которыми пополним таблицу интегралов.

$$\int \frac{dx}{(x+a)^\alpha} = \int \frac{d(x+a)}{(x+a)^\alpha} = \begin{cases} \ln|x+a| + C, & \alpha = 1; \\ \frac{(x+a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(x/a)}{1+(x/a)^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\mathrm{arcctg}\frac{x}{a} + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d(x/a)}{\sqrt{1-(x/a)^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C.$$

При нахождении первообразных часто применяется *метод интегрирования подстановкой*, который по существу есть просто вариация метода замены переменного (та же операция, но в обратном порядке). Пусть нам необходимо найти интеграл

$$\int f(x)dx.$$

Сделаем в нем замену переменного: $x = g(t)$. Тогда

$$\int f(x)dx = \left| x = g(t), \quad dx = g'(t)dt \right| = \int f(g(t))g'(t)dt.$$

Иногда интеграл в правой части оказывается проще, чем исходный интеграл. Рассмотрим примеры

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \left| x = a\sin t, \quad dx = a\cos t dt \right| = \int a^2\cos^2 t dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)+C.$$

Окончательно найдем

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{a^2}{2}\mathrm{arcsin}\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + C,$$

поскольку

$$\sin t = \frac{x}{a}, \quad \cos t = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}, \quad \frac{1}{2}\sin 2t = \sin t\cos t = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}.$$

Подстановки подчас бывают замысловатыми:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \left| x+\sqrt{x^2+a} = t, \quad dt = \left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\right)dx = \frac{t}{\sqrt{x^2+a}}dx \right|$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C.$$

ТЕОРЕМА 7.2. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на некотором интервале Δ, и, кроме того, на нем функция $f'(x)g(x)$ имеет первообразную. Тогда существует первообразная для функции $f(x)g'(x)$, причем справедливо любое из следующих двух эквивалентных тождеств:*

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx, \tag{7.7}$$

$$\int f(x)dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)df(x). \tag{7.8}$$

$\triangleleft$ В условиях теоремы функция $f(x)g(x)$ имеет производную и по правилу дифференцирования имеем

$$f(x)g'(x) = (f(x)g(x))'_x - f'(x)g(x).$$

Первообразная правой части этого равенства существует, поэтому существует и первообразная левой части. Учитывая, что

$$\int (f(x)g(x))'_x dx = f(x)g(x) + C,$$

получаем

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx + C.$$

Относя константу C к интегралу

$$\int f'(x)g(x)dx,$$

получаем (7.7), из которого сразу следует (7.8), так как $f'(x)dx = df(x)$, $g'(x)dx = dg(x)$. $\triangleright$

Формула (7.7) (или формула (7.8)) называется *формулой интегрирования по частям.* Рассмотрим примеры, которые внесем в таблицу интегралов:

$$\int \sqrt{x^2+a}dx =$$

$$\left| f(x) = \sqrt{x^2+a}, \quad df(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+a}}, \quad g(x) = x, \quad dg(x) = dx \right| =$$

$$= x\sqrt{x^2+a} - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a}} = x\sqrt{x^2+a} - \int \sqrt{x^2+a}dx + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}.$$

Используя предыдущий пример, окончательно получим:

$$\int \sqrt{x^2+a}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C.$$

Пусть

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a \neq 0.$$

Положим $g(x) = x$, $f(x) = (x^2+a^2)^{-n}$, тогда $df(x) = -2nx(x^2+a^2)^{-n-1}dx$. Поэтому

$$I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2I_{n+1}.$$

Следовательно,

$$I_{n+1} = \frac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}I_n. \tag{7.9}$$

При любом n по этой формуле можно вычислить интеграл I_{n+1}, вычислив сначала $I_1, I_2, \ldots, I_n$. Мы уже знаем, что

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\text{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

Отсюда

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

4.8 Интегрирование рациональных функций. Метод Остроградского

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.1. Функция $R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ многочлены от переменной x степеней m и n соответственно, называется *рациональной функцией.*

В этом параграфе мы решим вопрос о существовании неопределенного интеграла

$$\int R(x)dx,$$

где $R(x)$ – рациональная функция.

ТЕОРЕМА 8.1. *Пусть $R(x)$ – рациональная функция. Тогда существует первообразная $F(x)$ функции $R(x)$, выраженная через элементарные функции.*

Доказательство этой теоремы существенным образом опирается на два важнейших результата, доказательства которых приводятся в курсе теории функций комплексной переменной. Здесь же мы только приведем их формулировку.

ТЕОРЕМА 8.2 (основная теорема высшей алгебры). *Любой многочлен $P_n(x)$ степени n можно представить в виде произведения*

$$P_n(x) = a_0(x-x_1)^{\alpha_1}\dots(x-x_k)^{\alpha_k}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\dots(x^2+p_lx+q_l)^{\beta_l},$$

где x_i – корни многочлена $P_n(x)$ кратности α_i, $i = 1,\dots,k$, а двучлены $x^2+p_jx+q_j$, $j = 1,\dots,l$, действительных корней не имеют, причем

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_k + \frac{\beta_1 + \dots + \beta_l}{2} = n.$$

Прежде, чем сформулировать следующую теорему, введем понятие *правильной рациональной функции* $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ – такой рациональной функции, что $m < n$. Очевидно, любую рациональную функцию $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ (то есть и такую, где $m \geq n$) можно привести к виду

$S(x) + \frac{P_l(x)}{Q_n(x)}$, где $S(x)$ – некоторый многочлен, а $l < n$. Далее, назовем рациональные функции вида

$$\frac{\beta_i}{(x - x_i)^{\alpha_i}} \quad \text{и} \quad \frac{M_j x + N_j}{(x^2 + p_j x + q_j)^{\beta_j}} \quad (p_j^2 < 4q_j),$$

$\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{N}$, – *простейшими рациональными дробями* или короче – *простейшими дробями.*

ТЕОРЕМА 8.3. *Любая правильная рациональная функция разлагается в сумму простейших дробей, то есть*

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{\beta_{ij}}{(x - x_j)^j} + \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{\beta_i} \frac{M_{ij} x + N_{ij}}{(x^2 + p_i x + q_i)^j},$$

причем все коэффициенты этого разложения определяются однозначно.

Теперь перейдем к доказательству теоремы 8.1.

$\lhd$ В силу теоремы 8.3 интеграл

$$\int R(x)dx = \int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx$$

представляется в виде суммы интегралов вида

$$\int S(x)dx \qquad (8.1),$$

$$\int \frac{A_{ij} dx}{(x - x_i)^j}, \qquad (8.2)$$

$$\int \frac{M_{ij} x + N_{ij}}{(x^2 + p_i x + q_i)^j} dx \qquad (8.3).$$

Интеграл (8.1) – интеграл от многочлена – очевидно выражается через элементарные функции. Интеграл (8.2) – табличный интеграл:

$$\int \frac{A_{ij} dx}{(x - x_i)^j} = \begin{cases} \frac{A_{ij}}{(1-j)(x-x_i)^{j-1}}, & j \neq 1, \\ A_{ij} \ln |x - x_i|, & j = 1. \end{cases}$$

Интеграл (8.3) посредством преобразований сводится к сумме табличных интегралов:

$$\int \frac{M_{ij} x + N_{ij}}{(x^2 + p_i x + q_i)^j} dx = \frac{M_{ij}}{2} \int \frac{2x + p_i}{(x^2 + p_i x + q_i)^j} dx +$$

$$+\left(N_{ij}-\frac{M_{ij}p_i}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+p_ix+q_i)^j}=$$

$$\frac{M_{ij}}{2}\int\frac{d(x^2+p_ix+q_i)}{(x^2+p_ix+q_i)^j}+\left(N_{ij}-\frac{M_{ij}p_i}{2}\right)\int\frac{dx}{((x+\alpha_i)^2+\beta_i)^j},$$

$$\alpha_i=\frac{p_i}{2},\quad \beta_i=q_i-\frac{p_i^2}{4};$$

$$\int\frac{d(x^2+p_ix+q_i)}{(x^2+p_ix+q_i)^j}=\begin{cases}\frac{1}{1-j}(x^2+p_ix+q_i)^{1-j}, & j\neq 1,\\ \ln|x^2+p_ix+q_i|, & j=1.\end{cases}$$

Интеграл

$$I_j=\int\frac{dy}{(y^2+\beta)^j},\quad j\geq 1,$$

вычисляется посредством рекуррентного соотношения (7.9). $\triangleright$

М.В.Остроградским[1] предложен остроумный метод выделения рациональной части интеграла от правильной рациональной дроби $P(x)/Q(x)$.

Анализируя вид интегралов (8.2), (8.3), можно сделать следующие выводы:

(i) интегралы (8.2), (8.3) при $j=1$ являются нерациональными функциями (они равны логарифму или арктангенсу);

(ii) интеграл (8.2) при $j>1$ является правильной рациональной дробью со знаменателем, равным тому же двучлену в степени $j-1$;

(iii) интеграл (8.3) при $j>1$ с учетом рекуррентной формулы (7.9) равен сумме правильной рациональной дроби со знаменателем, равным тому же трехчлену в степени $j-1$, и приводящегося к арктангенсу интеграла

$$\mathrm{const}\int\frac{dx}{x^2+p_ix+q_i}.$$

Выводы (i), (ii), (iii) позволяют заключить, чему равна рациональная часть всего интеграла от правильной дроби $P(x)/Q(x)$. Пусть эта дробь несократима и ее знаменатель имеет вид

$$Q(x)=(x-x_1)^{\alpha_1}\dots(x-x_k)^{\alpha_k}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\dots(x^2+p_lx+q_l)^{\beta_l}.$$

[1]Михаил Васильевич Остроградский (1801-1861) – русский математик.

Тогда рациональная часть интеграла от этой дроби равна сумме правильных рациональных дробей, знаменатели которых соответственно равны

$$(x - x_1)^{\alpha_1 - 1}, \ldots, (x - x_k)^{\alpha_k - 1},$$
$$(x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1 - 1}, \ldots, (x^2 + p_l x + q_l)^{\beta_l - 1}.$$

Рациональная часть интеграла от дроби $P(x)/Q(x)$ представляет собой, очевидно, правильную рациональную дробь $P_1(x)/Q_1(x)$, знаменатель которой имеет вид

$$Q_1(x) = (x-x_1)^{\alpha_1-1} \ldots (x-x_k)^{\alpha_k-1}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1-1} \ldots (x^2+p_lx+q_l)^{\beta_l-1}.$$

Подсчитаем теперь сумму тех простейших дробей, интегралы от которых представляют нерациональные функции. Из выводов (i) и (iii) вытекает, что эта сумма равна правильной рациональной дроби $P_2(x)/Q_2(x)$, знаменатель которой равен

$$Q_2(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_k)(x^2 + p_1 x + q_1) \ldots (x^2 + p_l x + q_l).$$

Таким образом мы приходим к формуле Остроградского

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx,$$

В ней многочлены $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ определяются выше и могут быть вычислены без разложения многочлена $Q(x)$ на произведение неприводимых множителей.

Действительно, $Q_1(x)$ является наибольшим общим делителем двух многочленов $Q(x)$ и $Q'(x)$ и может быть вычислен при помощи алгоритма Евклида, который излагается в курсе алгебры.

Многочлен $Q_2(x)$ представляет собой частное $Q(x)/Q_1(x)$ и может быть вычислен посредством деления $Q(x)$ на $Q_1(x)$ "столбиком".

Остается вычислить многочлены $P_1(x)$ и $P_2(x)$. Поскольку дроби $P_1(x)/Q_1(x)$ и $P_2(x)/Q_2(x)$ являются правильными, многочлены $P_1(x)$ и $P_2(x)$ естественно задать как многочлены с неопределенными коэффициентами степени на единицу ниже, чем $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ соответственно. Для вычисления указанных неопределенных коэффициентов следует продифференцировать формулу Остроградского, привести результат дифференцирования к общему знаменателю и сопоставить коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях.

Метод Остроградского особенно эффективен, когда корни $Q(x)$ в основном являются кратными или когда вызывает затруднение нахождение корней $Q(x)$.

ПРИМЕР 8.1. Методом Остроградского вычислим

$$\int \frac{6-7x-x^2}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1}dx.$$

Имеем

$$Q(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1,$$

$$Q'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 6x - 2.$$

Наибольший общий делитель этих многочленов равен

$$Q_1(x) = x^2 - x + 1.$$

Поделив $Q(x)$ на $Q_1(x)$ "столбиком", найдем

$$Q_2(x) = x^2 - x + 1.$$

$P_1(x)$ и $P_2(x)$ задаем как многочлены первой степени с неопределенными коэффициентами, и формула Остроградского принимает вид

$$\int \frac{6-7x-x^2}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1}dx = \frac{Ax+B}{x^2-x+1} + \int \frac{Cx+D}{x^2-x+1}dx.$$

Продифференцируем эту формулу:

$$\frac{6-7x-x^2}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1} =$$

$$= \frac{A(x^2-x+1)-(Ax+B)(2x-1)}{x^2-x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1}.$$

Результат дифференцирования приводим к общему знаменателю, после чего сопоставляем числители. Получим

$$6-7x-x^2 = A(x^2-x+1)-(Ax+B)(2x-1)+(Cx+D)(x^2-x+1).$$

Сравнивая коэффициенты при x^0, x^1, x^2 и x^3, получим систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l} C = 0, \\ -A + D - C = -1, \\ -2B - D + C = -7, \\ A + B + D = 6. \end{array}\right\}$$

Решая эту систему, найдем $A = 2$, $B = 3$, $C = 0$, $D = 1$. Таким образом формула Остроградского принимает вид

$$\int \frac{6 - 7x - x^2}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1} dx = \frac{2x + 3}{x^2 - x + 1} + \int \frac{dx}{x^2 - x + 1}.$$

Вычислим интеграл в правой части:

$$\int \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \int \frac{dx}{(x - 1/2)^2 + 3/4} = \frac{2}{\sqrt{3}} \mathrm{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C.$$

Окончательно имеем

$$\int \frac{6 - 7x - x^2}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1} dx = \frac{2x + 3}{x^2 - x + 1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \mathrm{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C.$$

4.9 Интегрирование некоторых иррациональных функций

Рассмотрим теперь некоторые типы интегралов от иррациональных функций. Интеграл вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^{r_n}\right) dx, \tag{9.1}$$

где $r_k \in \mathbb{Q}$, $k = 1, \ldots, n$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$, подстановкой

$$\frac{ax + b}{cx + d} = t^p,$$

где p – наименьший общий знаменатель дробей $r_1, r_2, \ldots, r_n$, приводится к интегралу от рациональной функции. Действительно, находим

$$x = \frac{dt^p - b}{ct^p - a}, \quad dx = t^{p-1} \frac{p(ad - bc)}{(ct^p - a)^2} dt. \tag{9.2}$$

Подставляя (9.2) в интеграл (9.1), получим требуемое.

Интегралы вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx, \quad a \neq 0, \quad b^2-4ac \neq 0,$$

можно свести к интегралам от рациональных функций посредством *подстановок Эйлера*[1]:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t \pm \sqrt{a}x, \quad a > 0,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm tx \pm \sqrt{c}, \quad c > 0,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t(x-x_1), \quad b^2-4ac > 0,$$

где x_1 – один из корней квадратного трехчлена ax^2+bx+c.

Интеграл вида

$$\int x^m(ax^n+b)^p dx, \tag{9.3}$$

где $a, b \in \mathbb{R}$, $m, n, p \in \mathbb{Q}$, причем $a, b, n, p \neq 0$, называют *интегралом от дифференциального бинома.* Интеграл (9.3) сводится к интегралу от рациональной функции в следующих трех случаях:

$p \in \mathbb{Z}$ – подстановкой $x = t^q$, где q – общий знаменатель m, n;

$\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ – подстановкой $ax^n + b = t^q$, где q – знаменатель p;

$p + \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ – подстановкой $a + bx^{-n} = t^q$, где q – знаменатель p.

Отметим, что эти случаи были известны еще Ньютону, но лишь в середине XIX в. выдающийся русский математик П. Л. Чебышев доказал, что интеграл (9.3) в других случаях не выражается через элементарные функции.

Интеграл вида

$$\int R(\sin x, \cos x)dx$$

можно свести к интегралу от рациональной функции посредством подстановки $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$, поскольку

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Интеграл вида

$$\int R(\mathrm{sh}x, \mathrm{ch}x)dx$$

[1] Леонард Эйлер (1707-1783) – математик, механик и физик. Родился в Швейцарии, большую часть своей жизни провел в России.

можно рационализировать посредством подстановки $t = \mathrm{th}\frac{x}{2}$, при этом

$$\mathrm{sh}x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \mathrm{ch}x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1-t^2}.$$

5 ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ

- Том, Том, мы заблудились! Мы заблудились! Нам никогда не выбраться из этой страшной пещеры!
Марк Твен "Приключения Тома Сойера"

5.1 Определение интеграла Римана и интегралов Дарбу

Пусть $[a,b] \subset \mathbb{R}$ – некоторый отрезок; $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ – некоторая функция. Отрезок $[a,b]$ разобьем на n частей точками $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ и будем говорить, что производено *разбиение* r отрезка $[a,b]$ на отрезки $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Длину отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ условимся обозначать через Δx_i, а $\max\{\Delta x_i : i = 0, \ldots, n-1\} = \lambda_r$. На каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ выберем произвольную точку ξ_i и составим сумму

$$S_r = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Ее называют *интегральной суммой Римана* функции f на отрезке $[a,b]$ с разбиением r и промежуточными точками ξ_i.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. *Интегралами Римана от функции f на отрезке* $[a,b]$ называется конечный предел

$$\lim_{\lambda_r \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx = I_R, \tag{1.1}$$

если он не зависит от выбора разбиений и точек ξ_i.

Иначе говоря, I_R есть такое число, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall r\ \forall \{\xi_i\}$ $(\lambda_r < \delta \Rightarrow |S_r - I_R| < \varepsilon)$. Нетрудно видеть, что мы дали определение интеграла Римана в духе определения предела по Коши. Дадим теперь определение интеграла Римана в духе определения предела по Гейне.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Пусть $\{r^k\}$ – последовательность разбиений $r^k = \{a = x_0^k < x_1^k < \cdots < x_{n_k}^k = b\}$ такая, что $\lambda_{r^k} = \max\limits_{1 \le i \le n_k} \{\Delta_i^k\} \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда *интегралом Римана от функции* *f на отрезке* $[a,b]$ называется конечный предел

$$\lim_{k\to\infty} S_{r^k} = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{n_k-1} f(\xi_i^k)\Delta x_i^k = \int\limits_a^b f(x)dx = I_R,$$

если он не зависит от выбора разбиений r^k и промежуточных точек $\xi_i^k \in [x_i^k, x_{i+1}^k]$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.1. Доказать эквивалентность определений 1.1 и 1.2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Функцию $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, для которой существует предел (1.1), называют *интегрируемой по Риману* функцией. Множество всех интегрируемых по Риману на отрезке $[a,b]$ функций будем обозначать символом $\mathcal{R}[a,b]$

Имеет место *критерий Коши* интегрируемости функции.

ТЕОРЕМА 1.1. $(f \in \mathcal{R}[a,b]) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall r, r'\ \forall\{\xi_i\}, \{\xi_i'\}$ $(\lambda_r, \lambda_{r'} < \delta \Rightarrow |S_r - S_{r'}| < \varepsilon)$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.2. Доказать теорему 1.1.

Установим теперь *необходимое условие* интегрируемости по Риману.

ТЕОРЕМА 1.2. *Если функция f интегрируема на отрезке* $[a,b]$, *то она ограничена на нем.*

$\lhd$ Предположим, что интегрируемая функция не является ограниченной. Рассмотрим интегральную сумму

$$S_r = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

соответствующую произвольному разбиению r. Если f неограничена на $[a,b]$, то существует отрезок (скажем, $[x_i, x_{i+1}]$), на котором f тоже неограничена. Имеем

$$S_r = f(\xi_{i_0})\Delta x_{i_0} + \sum_{i\neq i_0} f(\xi_i)\Delta x_i = f(\xi_{i_0})\Delta x_{i_0} + A.$$

Поскольку f неограничена на $[x_{i_0}, x_{i_0+1}]$, то не меняя величины A, мы можем сколь угодно увеличить число $|f(\xi_{i_0})|\Delta x_{i_0}$, выбрав подходящим образом точку $\xi_{i_0} \in [x_{i_0}, x_{i_0+1}]$. А поскольку

$$|S_r| \geq |f(\xi_{i_0})|\Delta x_{i_0} - |A|,$$

то отсюда следует $f \notin \mathcal{R}[a,b]$. Противоречие с условием теоремы.$\triangleright$

Установленная теорема позволяет нам в дальнейшем обходиться только ограниченными функциями. При исследовании интегрируемости функции бывают полезны так называемые *интегралы Дарбу* [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ – ограниченная функция; $r = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ – произвольное разбиение отрезка $[a,b]$. Положим $m_i = \inf\limits_{[x_i,x_{i+1}]} f(x)$, а $M_i = \sup\limits_{[x_i,x_{i+1}]} f(x)$, где $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Числа

$$\underline{S}_r = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i, \quad \overline{S}_r = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$$

называются *нижней* и *верхней суммами Дарбу* соответственно.

Очевидно, $\underline{S}_r \le \overline{S}_r$.

Пусть r_1, r_2, r_3 – разбиения отрезка $[a,b]$. Если все точки разбиения r_1 принадлежат разбиению r_2, то будем писать $r_1 \subset r_2$. Если множество точек разбиения r_3 состоит из точек разбиений r_1 и r_2, то мы будем писать $r_3 = r_1 \cup r_2$.

ЛЕММА 1.1. $(r \subset r') \Rightarrow (\underline{S}_r \le \underline{S}_{r'} \le \overline{S}_{r'} \le \overline{S}_r)$.

$\triangleright$ Пусть $r = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_n\}$, а $r' = \{x_0 = x_0^0 < x_0^1 < \cdots < x_0^{m_0} < x_1 = x_1^0 < \cdots < x_1^{m_1} < x_2 = x_2^0 < \cdots < x_{n-1}^{m_{n-1}} < x_n\}$. Тогда, очевидно,

$$m_i^j = \inf_{x \in [x_i^j, x_{i+1}^j]} f(x) \ge \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = m_i,$$

и поэтому

$$\underline{S}_r = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \sum_{j=0}^{m_j - 1} \Delta x_i^j \ge \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m_j - 1} m_i^j \Delta x_i^j = \underline{S}_{r'}.$$

Мы доказали первое неравенство. Третье доказывается аналогично, а второе очевидно. $\triangleright$

ЛЕММА 1.2. $\forall r_1, r_2$ $\underline{S}_{r_1} \le \overline{S}_{r_2}$.

$\triangleleft$ Действительно, $\underline{S}_{r_1} \le \underline{S}_{r_1 \cup r_2} \le \overline{S}_{r_1 \cup r_2} \le \overline{S}_{r_1}$. $\triangleright$

[1] Жан Гастон Дарбу (1842-1917) – французский математик, известен своими работами в области математического анализа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Числа

$$\inf_r \overline{S}_r = \overline{I}_D \quad \text{и} \quad \sup_r \underline{S}_r = \underline{I}_D$$

назовем *верхним* и *нижним интегралами Дарбу* функции f на отрезке $[a, b]$.

ТЕОРЕМА 1.3. *Пусть функция* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ограничена. Тогда существуют* $\underline{I}_D, \overline{I}_D \in \mathbb{R}$.

$\lhd$ Рассмотрим множество $\{\overline{S}_r : \quad r$ – разбиение $\}$ всех верхних сумм Дарбу функции f на отрезке $[a, b]$. В силу леммы 1.2 оно ограничено снизу любой нижней суммой Дарбу функции f на отрезке $[a, b]$. В силу принципа точной нижней грани $\exists! \overline{I}_D = \inf\limits_r \overline{S}_r$.

Аналогично устанавливается существование и единственность нижнего интеграла Дарбу. $\rhd$

5.2 Связь интеграла Римана и интегралов Дарбу

Свяжем теперь понятия интеграла Римана и интегралов Дарбу.

Сформулируем два вспомогательных утверждения:

$$A := (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists r \quad (r \quad - \quad \text{разбиение}) \quad (\overline{S}_r - \underline{S}_r < \varepsilon)).$$

$$B := (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall r \quad (r \quad - \quad \text{разбиение})$$
$$(\lambda_r < \delta \Rightarrow \overline{S}_r - \underline{S}_r < \varepsilon)).$$

ЛЕММА 2.1. $(\overline{I}_D = \underline{I}_D) \Leftrightarrow A$.

$\lhd$ Из $\overline{I}_D = \underline{I}_D$ следует, что $\exists r_1, r_2$ такие, что $\underline{I}_D - \varepsilon/2 < \underline{S}_{r_1}$, $\overline{I}_D + \varepsilon/2 > \overline{S}_{r_2}$. Тогда при $r = r_1 \cup r_2$ имеем

$$\underline{I}_D - \varepsilon/2 < \underline{S}_{r_1} \le \underline{S}_r \le \overline{S}_r \le \overline{S}_{r_2} < \overline{I}_D + \varepsilon/2,$$

то есть $\overline{S}_r - \underline{S}_r < \varepsilon$.

Пусть r – разбиение, для которого выполнено A. Тогда

$$\underline{S}_r \le \underline{I}_D \le \overline{I}_D \le \overline{S}_r,$$

откуда $\overline{I}_D - \underline{I}_D < \varepsilon$. Но $\varepsilon > 0$ можно брать как угодно малым, а разность $\overline{I}_D - \underline{I}_D$ не зависит от r. Поэтому $\overline{I}_D = \underline{I}_D$. $\rhd$

ЛЕММА 2.2. $A \Leftrightarrow B$.

$\lhd$ Утверждение A из утверждения B следует тривиально.

Пусть r^* – разбиение, для которого выполнено A. Выберем $\delta > 0$ по ε и r так, чтобы были выполнены неравенства

$$\begin{cases} 2\delta < x^*_{i+1} - x^*_i, \quad i = 0, \ldots, n-1, \quad x^*_i \in r^*, \\ 4n\delta M < \varepsilon, \quad M = \sup\limits_{[a,b]} |f(x)|. \end{cases}$$

Теперь пусть r – некоторое произвольное разбиение, у которого $\lambda_r < \delta$. Тогда имеем $\overline{S}_r - \underline{S}_r = \sum\limits_i{}' (M_i - m_i)\Delta x_i + \sum\limits_j{}'' (M_j - m_j)\Delta x_j$, где сумма $\sum'$ взята по тем отрезкам разбиения r, которые содержат точки разбиения r^*, а сумма $\sum''$ взята по остальным отрезкам.

В сумме $\sum'$ не более $2n$ слагаемых – один отрезок покрывает точку a, а другой – точку b, и $\forall x^*_i \in r^*$ покрывается не более чем двумя отрезками разбиения r. Имеем $\sum\limits_i{}' (M_i - m_i)\Delta x_i \le 2M\delta \cdot 2n < \varepsilon$.

Сумму $\sum''$ запишем ввиде кратной суммы $\sum\limits_j{}'' = \sum\limits_k \sum^k$, где $\sum^k$ обозначает сумму слагаемых $\sum''$, попавших в один отрезок $[x^*_k, x^*_{k+1}]$ разбиения r^*. Имеем $\sum\limits_j{}'' (M_j - m_j)\Delta x_j = \sum\limits_k \sum^k (M_k - m_k)\Delta x_k \le \sum\limits_k (M^*_k - m^*_k) \sum^k \Delta x_k \le \le \sum\limits_k (M^*_k - m^*_k)\Delta x^*_k \le \overline{S}_{r^*} - \underline{S}_{r^*} < \varepsilon$.

Поэтому $\overline{S}_r - \underline{S}_r < 2\varepsilon$ для всех разбиений r, для которых $\lambda_r < \delta$. $\rhd$

ЛЕММА 2.3. $B \Leftrightarrow (f \in \mathcal{R}[a,b])$.

$\lhd$ Из определения 2.1 следует, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall r\ \forall \{\xi_i\}$ (r – разбиение) $(\lambda_r < \delta)$ имеют место неравенства

$$I_R - \varepsilon/2 \le \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \le I_R + \varepsilon/2.$$

Беря верхнюю и нижнюю грани по $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, получим

$$I_R - \varepsilon/2 \le \underline{S}_r \le \overline{S}_r \le I_R + \varepsilon/2,$$

что и требовалось.

Докажем утверждение в обратную сторону. Для любого разбиения r, удовлетворяющего B, имеем

$$\underline{S}_r \le \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \le \overline{S}_r.$$

Поскольку $B \Leftrightarrow A \Leftrightarrow (\underline{I}_D = \overline{I}_D)$, то $\underline{S}_r \le \underline{I}_D = \overline{I}_D \le \overline{S}_r$. Положив $\underline{I}_D = \overline{I}_D = I_R$, получим

$$|I_R - \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i| \le \overline{S}_r - \underline{S}_r < \varepsilon. \quad \triangleright$$

Из этих лемм следует

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть функция $f : [f, b] \to \mathbb{R}$ ограничена. Тогда* $(f \in \mathcal{R}[a, b]) \Leftrightarrow (\underline{I}_D = \overline{I}_D)$.

ПРИМЕР 2.1. Приведем пример ограниченной, но не интегрируемой по Риману функции. Для функции Дирихле $D(x)$, равной единице во всех рациональных и нулю во всех иррациональных точках, верхний интеграл Дарбу на отрезке $[0, 1]$ равен 1, а нижний – 0. Значит, функция Дирихле хоть и ограничена на $[0, 1]$, но неинтегрируема. Поэтому актуален поиск достаточных условий интегрируемости функции на отрезке.

ПРИМЕР 2.2. Пусть $f(x) = 1$ на отрезке $[a, b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int_a^b dx = b - a.$$

Действительно,

$$\underline{S}_r = \overline{S}_r = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = x_1 - a + x_2 - x_1 + \cdots + b - x_{n-1} = b - a.$$

5.3 Достаточные условия интегрируемости по Риману

Рассмотрим теперь достаточные условия интегрируемости.

ТЕОРЕМА 3.1. $(f \in C[a, b]) \Rightarrow (f \in \mathcal{R}[a, b])$.

$\triangleleft$ Запишем разность сумм Дарбу:

$$\overline{S}_r - \underline{S}_r = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)\Delta x_i,$$

где $M_i = \sup\limits_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)$, а $m_i = \inf\limits_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)$. Поскольку $f \in C[a,b] \Rightarrow f \in C[x_i, x_{i+1}]$, и по теореме Вейерштрасса о максимальном значении непрерывной функции $\exists x_i'', x_i'' \in [x_i, x_{i+1}]$ $f(x_i') = M_i$, $f(x_i'') = m_i$. По теореме Кантора о равномерной непрерывности для данного $\omega > 0$ подберем $\alpha > 0$ такое, что $\forall x', x'' \in [a,b]$ $(|x' - x''| < \alpha \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \omega)$.

Теперь по данному $\varepsilon > 0$ возьмем $\delta = \min\{\alpha, \varepsilon/\omega\}$, и пусть r – произвольное разбиение такое, что $\lambda_r < \delta$. Тогда

$$\overline{S}_r - \underline{S}_r = \sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1}(f(x_i') - f(x_i''))\Delta x_i < \omega \cdot \frac{\varepsilon}{\omega} = \varepsilon.$$

В силу леммы 2.3 получаем требуемое. $\triangleright$

ТЕОРЕМА 3.2. *Монотонная на отрезке* $[a, b]$ *функция интегрируема по Риману на нем.*

$\triangleleft$ Пусть для определенности функция f монотонно возрастает на $[a, b]$. Если $f(a) = f(b)$, то функция постоянна, и поэтому

$$\overline{S}_r - \underline{S}_r = \sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)\Delta x_i = (f(a) - f(a))\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i = 0 \cdot (b - a) = 0$$

независимо от разбиения r.

Если $f(a) < f(b)$, то для данного $\varepsilon > 0$ возьмем

$$\delta < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)},$$

и пусть r – произвольное разбиение, для которого $\lambda_r < \delta$. Тогда

$$\overline{S}_r - \underline{S}_r = \sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1}(f(x_{i+1}) - f(x_i))\Delta x_i \leq$$

$$\delta\sum_{i=0}^{n-1}(f(x_{i+1}) - f(x_i)) = \delta(f(b) - f(a)) < \varepsilon. \quad \triangleright$$

5.4 Свойства интеграла Римана

СВОЙСТВО 1 (аддитивность). *Пусть* $c \in [a,b]$. *Тогда* $(f \in \mathcal{R}[a,b]) \Leftrightarrow (f \in \mathcal{R}[a,c] \wedge f \in \mathcal{R}[c,b])$, *причем*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

$\lhd$ Пусть f интегрируема на $[a,b]$. Тогда для данного $\varepsilon > 0$ подберем $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения r отрезка $[a,b]$ с $\lambda_r < \delta$ выполнялось

$$\overline{S}_r - \underline{S}_r < \varepsilon.$$

Пусть теперь r^* – разбиение $[a,b]$, содержащее точки r и точку c. Тогда по лемме 1.1

$$\varepsilon > \overline{S}_r - \underline{S}_r \geq \overline{S}_{r^*} - \underline{S}_{r^*} = (\overline{S}'_{r^*} - \underline{S}'_{r^*}) + (\overline{S}''_{r^*} - \underline{S}''_{r^*}),$$

где $\overline{S}'_{r^*}(\overline{S}''_{r^*})$ и $\underline{S}'_{r^*}(\underline{S}''_{r^*})$, – суммы Дарбу на отрезке $[a,c]$ $([c,b])$.

Доказательство обратного утверждения аналогично. $\rhd$

Свойство 1 позволяет расширить определение интеграла, именно, в случае $a = b$ положим

$$\int\limits_a^a f(x)dx = 0, \quad \int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$$

СВОЙСТВО 2 (линейность). *Пусть* $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, $c \in \mathbb{R}$. *Тогда* $f + g \in \mathcal{R}[a,b]$, $cf \in \mathcal{R}[a,b]$, *причем*

$$\int\limits_a^b (f(x)+g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx,$$

$$\int\limits_a^b cf(x)dx = c\int\limits_a^b f(x)dx.$$

$\lhd$ По определению интеграла и соответствующим свойствам предела имеем

$$\int\limits_a^b (f(x)+g(x))dx = \lim_{\lambda_r \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} (f(\xi_i) + g(\xi_i))\Delta x_i =$$

$$\lim_{\lambda_r\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{\lambda_r\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

$$\int_a^b cf(x)dx = \lim_{\lambda_r\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} cf(\xi_i)\Delta x_i = c\lim_{\lambda_r\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = c\int_a^b f(x)dx. \quad \triangleright$$

СВОЙСТВО 3 (интегрируемость произведения и частного). *Пусть* $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$. *Тогда* $fg \in \mathcal{R}[a,b]$ *и* $f/g \in \mathcal{R}[a,b]$, *если* $|g(x)| > c > 0$ *на* $[a,b]$.

$\triangleleft$ Обозначим через $M_{f,i} = \sup\limits_{[x_i,x_{i+1}]} f(x)$, $m_{f,i} = \inf\limits_{[x_i,x_{i+1}]} f(x)$. Для любых $\xi, \eta \in [x_i, x_{i+1}]$ имеем

$$|f(\xi)g(\xi) - f(\eta)g(\eta)| \le |f(\xi)|\cdot|g(\xi) - g(\eta)| + |g(\eta)|\cdot|f(\xi) - f(\eta)| \le$$

$$K_f(M_{g,i} - m_{g,i}) + K_g(M_{f,i} - m_{f,i}).$$

$$\frac{1}{g(\xi)} - \frac{1}{g(\eta)} = \frac{g(\eta) - g(\xi)}{g(\xi)g(\eta)} \le \frac{1}{c^2}(M_g - m_g),$$

где $K_f = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Взяв точные верхние грани левых частей полученных неравенств по $\xi, \eta \in [x_i, x_{i+1}]$, умножив их на Δx_i и просуммировав по i, получим

$$\sum_{i=0}^{n-1}(M_{fg,i} - m_{fg,i})\Delta x_i \le K_f\sum_{i=0}^{n-1}(M_{g,i} - m_{g,i})\Delta x_i + K_g\sum_{i=0}^{n-1}(M_{f,i} - m_{f,i})\Delta x_i,$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}(M_{1/g,i} - m_{1/g,i})\Delta x_i, \le \frac{1}{c^2}\sum_{i=0}^{n-1}(M_{g,i} - m_{g,i})\Delta x_i.$$

Теперь для данного $\varepsilon > 0$ найдем разбиения r_1 и r_2 такие, что

$$\overline{S}_{r_1}(f) - \underline{S}_{r_1}(f) < \varepsilon, \quad \overline{S}_{r_2}(g) - \underline{S}_{r_2}(g) < \varepsilon.$$

Ввиду первого из полученных перед этим неравенств для разбиения $r = r_1 \cup r_2$ имеем

$$\overline{S}_r(fg) - \underline{S}_r(fg) < (K_f + K_g)\varepsilon,$$

поскольку $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$. Второе утверждение доказывается аналогично. $\triangleright$

СВОЙСТВО 4. (i) *Пусть* $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, $\forall x \in [a,b]$ $(f(x) \leq g(x))$, *тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx.$$

(ii) *Пусть* $f \in \mathcal{R}[a,b]$, *тогда и* $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$, *причем*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx \leq M(b-a),$$

где $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

$\triangleleft$ (i) Используя свойства предела имеем

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda_r\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \leq \lim_{\lambda_r\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)\Delta x_i = \int\limits_a^b g(x)dx.$$

(ii) Покажем сначала, что $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$. Поскольку для любых $\xi, \eta \in [a,b]$ имеет место неравенство

$$||f(\xi)| - |f(\eta)|| \leq |f(\xi) - f(\eta)|,$$

то на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ разбиения r отрезка $[a,b]$ имеет место соотношение

$$\overline{M}_i - \overline{m}_i \leq M_i - m_i,$$

где $\overline{M}_i = \sup\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]} |f(x)|$, $\overline{m}_i = \inf\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]} |f(x)|$, а M_i и m_i – соответствующие величины для f. Поэтому разность верхней и нижней сумм Дарбу для функции $|f|$ не превосходит аналогичной разности для функции f:

$$\overline{S}_r(|f|) - \underline{S}_r(|f|) = \sum_{i=0}^{n-1}(\overline{M}_i - \overline{m}_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)\Delta x_i \leq$$

$$\overline{S}_r(f) - \underline{S}_r(f).$$

Теперь, поскольку $\forall x \in [a,b]$ $(-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|)$, то в силу (i) имеем

$$-\int\limits_a^b |f(x)|dx \le \int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b |f(x)|dx.$$

Неравенство

$$\int\limits_a^b |f(x)|dx \le M(b-a)$$

очевидно. $\triangleright$

ТЕОРЕМА 4.1 (теорема о среднем). *Пусть* $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ *и* $\forall x \in [a,b]$ $(g(x) \ge 0)$. *Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \gamma \int\limits_a^b g(x)dx,$$

где $m \le \gamma \le M$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

$\triangleleft$ Поскольку $g(x) \ge 0$, то $mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$ на $[a,b]$. Отсюда ввиду свойств 2,4 имеем

$$m\int\limits_a^b g(x)dx \le \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \le M\int\limits_a^b g(x)dx.$$

Если

$$\int\limits_a^b g(x)dx = 0,$$

то равенство очевидно. Если же нет, то положим

$$\gamma = \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx}. \quad \triangleright$$

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Пусть в условиях теоремы 4.1* $f \in C[a,b]$.

Тогда существует точка $\xi \in [a,b]$ такая, что

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)dx.$$

$\triangleleft$ Результат следует из теоремы Больцано - Коши о промежуточном значении. $\triangleright$

5.5 Интеграл как функция верхнего предела. Формула Ньютона - Лейбница

Пусть $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Заметим, что

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt,$$

то есть не имеет никакого значения, какая буква (x или t) стоит под знаком определенного интеграла.

Пусть $x \in [a,b]$; рассмотрим функцию

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt.$$

Заметим, что

$$F(a) = \int\limits_a^a f(t)dt = 0, \quad F(b) = \int\limits_a^b f(t)dt.$$

ТЕОРЕМА 5.1. $(f \in \mathcal{R}[a,b]) \Rightarrow (F \in C[a,b])$. *Если вдобавок f непрерывна в точке $x_0 \in [a,b]$, то F дифференцируема в точке x_0, и $F'_{x_0} = f(x_0)$.*

$\triangleleft$ Если функция интегрируема на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на нем. Пусть $|f(t)| \leq M$ при $a \leq t \leq b$. Тогда при $x', x'' \in [a,b]$ имеем

$$|F(x'') - F(x')| = \left|\int\limits_a^{x''} f(t)dt - \int\limits_a^{x'} f(t)dt\right| = \left|\int\limits_{x'}^{x''} f(t)dt\right| \leq M(x'' - x')$$

в силу теоремы о среднем. Мы видим, что для данного $\varepsilon > 0$ $|F(x'')-F(x')| < \varepsilon$, если только $|x''-x'| < \delta = \varepsilon/M$. Этим доказана непрерывность и, более того, равномерная непрерывность функции F.

Пусть теперь f непрерывна в точке x_0. Для данного $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ так, что $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ как только $|t - x_0| < \delta$ и $a \le t \le b$. Тогда при $x_0 - \delta < s \le x_0 \le t < x_0 + \delta$ и $a \le s < t \le b$ имеем

$$\left|\frac{F(t)-F(s)}{t-s} - f(x_0)\right| = \frac{1}{t-s}\left|\int\limits_s^t f(u)du - f(x_0)(t-s)\right| \le$$

$$\frac{1}{t-s}\int\limits_s^t |f(u)-f(x_0)|du < \frac{\varepsilon(t-s)}{t-s} = \varepsilon.$$

Следовательно, $F'_{x_0} = f(x_0)$. $\triangleright$

В случае $f \in C[a,b]$ функция

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$$

будет, очевидно, первообразной функции f.

ТЕОРЕМА 5.2 (Ньютона - Лейбница). *Если* $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *и существует первообразная* $\Phi(x)$ функции f на $[a,b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

$\triangleleft$ Пусть Φ – произвольная первообразная функции f на $[a,b]$. Тогда $\Phi(x) = F(x) + C$, где $F(x)$ определена выше. Поскольку $\Phi(a) = F(a) + C$, а $F(a) = 0$, то $\Phi(a) = C$. Значит, $F(x) = \Phi(x) - \Phi(a)$. И при $x = b$ получаем

$$F(b) = \int\limits_a^b f(t)dt = \Phi(b) - \Phi(a). \quad \triangleright$$

Приведем другие часто используемые варианты формулы Ньютона - Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = \Phi(x)\Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a);$$

$$\int_a^b F'_x dx = \int_a^b dF(x) = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

если F – дифференцируемая на (a, b) функция, производная которой непрерывна на $[a, b]$.

Теорема Ньютона - Лейбница является основной теоремой одномерного МАТАН'а, поскольку она устанавливает связь между неопределенным и определенным интегралами. Пользуясь этой связью, перенесем на определенный интеграл основные способы интегрирования неопределенного интеграла.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. *Пусть f и g – непрерывно дифференцируемые на $[a, b]$ функции. Тогда*

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

$\triangleleft$ Интегрируя равенство

$$(f(x)g(x))'_x = f'_x(x)g(x) + f(x)g'_x(x),$$

с учетом непрерывности, а значит, и интегрируемости фигурирующих в нем функций получим

$$\int_a^b (f(x)g(x))'_x dx = \int_a^b f'_x(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'_x(x)dx,$$

откуда требуемое получается после применения теоремы 5.1. $\triangleright$

СЛЕДСТВИЕ 5.2. *Пусть $f \in C[a, b]$, а $\varphi : I \to [a, b]$ непрерывно дифференцируемая функция на отрезке I с концами $c = \varphi^{-1}(a)$ и $d = \varphi^{-1}(b)$. Тогда справедливо тождество*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'_t dt.$$

$\lhd$ Пусть F и Φ – первообразные функций f и $f(\varphi(t))\varphi'_t$. Имеем $\Phi(t) = F(\varphi(t)) + C$. Поэтому $\Phi(d) - \Phi(c) = F(b) - F(a)$ в силу теоремы 5.1. $\rhd$

5.6 Определение и свойства несобственного интеграла Римана

Напомним, что мы определяли интеграл Римана при соблюдении двух условий: (i) ограниченность множества, на котором интегрируется функция (в нашем случае это был отрезок $[a, b]$); (ii) ограниченность интегрируемой функции. Однако, интеграл Римана допускает обобщение при нарушении этих условий. В таком случае он называется *несобственным интегралом Римана.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Пусть $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, причем $-\infty < a < b < +\infty$, и при любом $b' \in (a, b)$ функция $f \in \mathcal{R}[a, b']$, а в окрестности точки b функция f неограничена. (В силу необходимого условия интегрируемости $f \notin \mathcal{R}[a, b)$). *Несобственным интегралом первого типа* от функции f на промежутке $[a, b)$ называют предел

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{b' \to b-} \int\limits_a^{b'} f(x)dx,$$

если, разумеется, он существует. В таком случае еще говорят, что интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

сходится, а в противном случае говорят, что он *расходится* или не существует как несобственный риманов интеграл.

Аналогично определяется интеграл для функции $f : (a, b] \to \mathbb{R}$, причем $f \in \mathcal{R}[a', b]\ \forall a' \in (a, b)$, но в окрестности точки a функция неограничена.

ПРИМЕР 6.1. Интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \tag{6.1}$$

при $\alpha > 0$ удовлетворяет всем требованиям определения 6.1. Рассмотрим при $\alpha \neq 1$

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\Big|_{\varepsilon}^{1} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{1-\alpha}(1-\varepsilon^{1-\alpha}) = \begin{cases}\frac{1}{1-\alpha},\ \alpha<1,\\ +\infty,\ \alpha>1.\end{cases}$$

Если же $\alpha = 1$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\ln x\Big|_{\varepsilon}^{1} = -\lim_{\varepsilon\to 0+}\ln\varepsilon = +\infty.$$

Таким образом интеграл (6.1) сходится при $\alpha < 1$ и расходится в противном случае.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2. Пусть $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, причем при любом $b' \in (a, +\infty)$ функция $f \in \mathcal{R}[a, b']$. *Несобственным интегралом второго типа* от функции f на промежутке $[a, +\infty)$ называется предел

$$\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b'\to+\infty}\int\limits_{a}^{b'} f(x)dx,$$

если он существует.

Аналогично определяется несобственный интеграл для функции $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$

ПРИМЕР 6.2. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_{1}^{A}\frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\Big|_{1}^{A} = \begin{cases}\frac{1}{\alpha-1}, & \alpha>1,\\ +\infty, & \alpha<1,\end{cases}$$

$$\int\limits_{1}^{+\infty} = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_{1}^{A}\frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty}\ln A = +\infty.$$

Нас этот пример не должен удивлять, поскольку мы знакомы с поведением обобщенного гармонического ряда.

В дальнейшем мы будем рассматривать оба случая несобственного интеграла вместе. Поэтому условимся о следующей терминологии:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.3. Выражение

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

будем называть *интегралом* от функции f *с особенностью в точке* b, если выполнено одно из следующих условий:

(i) $b \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{R}[a, b'] \ \forall b' \in (a, b)$ и f неограничена в окрестности точки b;

(ii) $b = +\infty$, $f \in \mathcal{R}[a, b'] \ \forall b' \in (a, +\infty)$.

Подобным образом определяется интеграл с особенностью в точке a.

ТЕОРЕМА 6.1 (критерий Коши). *Интеграл*

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

с единственной особенностью в точке b *сходится точно тогда, когда* $\forall \varepsilon > 0 \ \exists b_0 \in (a, b) \ \forall b', b'' \in (b_0, b)$

$$\left| \int\limits_{b'}^{b''} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

$\triangleleft$ Рассмотрим функцию

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt.$$

Сходимость интеграла

$$\int\limits_a^b f(t)dt$$

эквивалентна существованию предела $\lim\limits_{x \to b-} F(x)$, что в свою очередь эквивалентно по критерию Коши для функции выполнению условия $\forall \varepsilon > 0 \ \exists b_0 \in (a, b) \ \forall b', b'' \in (b_0, b) \ |F(b'') - F(b')| < \varepsilon$. Но

$$F(b'') - F(b') = \int\limits_{b'}^{b''} f(t)dt. \quad \triangleright$$

Перейдем к рассмотрению свойств несобственных интегралов. Здесь мы перенесем соответствующие свойства собственных римановых интегралов на несобственные.

СВОЙСТВО 1. *Пусть сходится интеграл*

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

с единственной особенностью в точке b. *Тогда* $\forall c \in (a, b)$ *интеграл*

$$\int\limits_c^b f(x)dx$$

тоже сходится, причем

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

$\triangleleft$ Поскольку условие Коши для интегралов

$$\int\limits_a^b f(x)dx \quad \text{и} \quad \int\limits_c^b f(x)dx$$

формулируется совершенно одинаково, то в силу критерия Коши они сходятся или расходятся одновременно. Кроме того,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{b'\to b-} \int\limits_a^{b'} f(x)dx = \lim_{b'\to b-} \left(\int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^{b'} f(x)dx \right) =$$

$$\int\limits_a^c f(x)dx + \lim_{b'\to b-} \int\limits_c^{b'} f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Здесь первое равенство имеет место в силу определения интеграла, второе – в силу аддитивности собственного интеграла Римана, третье – свойство предела суммы; ну а четвертое – опять в силу определения несобственного интеграла. $\triangleright$

СВОЙСТВО 2. *Пусть сходятся интегралы*

$$\int_a^b f(x)dx, \quad \int_a^b g(x)dx$$

с единственной особенностью в точке b. *Тогда интеграл*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx$$

при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *тоже сходится, причем*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

УПРАЖНЕНИЕ 6.1. Доказать свойство 2.

5.7 Абсолютная и условная сходимость несобственного интеграла

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Интеграл

$$I_f = \int_a^b f(x)dx$$

с особенностью в точке b называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл

$$I_{|f|} = \int_a^b |f(x)|dx.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Нетрудно заметить, что абсолютно сходящийся интеграл сходится. Действительно, в силу критерия Коши из сходимости интеграла $I_{|f|}$ следует, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists b_0 \in (a, b)\ \forall b', b'' \in (b_0, b)$ $(b' < b'')$

$$\varepsilon > \int_{b'}^{b''} |f(x)|dx \geq \left| \int_{b'}^{b''} f(x)dx \right|.$$

Отсюда опять же в силу критерия Коши следует сходимость интеграла I_f. $\triangleright$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.2. Сходящийся, но не абсолютно сходящийся несобственный интеграл называется *условно сходящимся.*

Для несобственного интеграла от неотрицательной или неположительной функции, очевидно, понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают.

ТЕОРЕМА 7.1 (критерий Вейерштрасса для несобственных интегралов). *Интеграл от неотрицательной функции* $f(x) \geq 0$, $x \in (a, b)$,

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

с единственной особенностью в точке b *сходится точно тогда, когда функция*

$$F(t) = \int\limits_a^t f(x)dx$$

ограничена при $t \in (a, b)$.

$\triangleleft$ Ввиду неотрицательности f функция $F(t)$ монотонно возрастает. Поэтому утверждение следует из критерия Вейерштрасса для монотонных функций. $\triangleright$

Сформулируем и докажем аналоги признаков сравнения в теории рядов.

ТЕОРЕМА 7.2 (первая теорема сравнения). *Пусть интегралы*

$$I_1 = \int\limits_a^b f(x)dx, \quad I_2 = \int\limits_a^b g(x)dx$$

имеют единственную особенность в точке b, *и на промежутке* (a, b) *выполнены неравенства* $0 \leq f(x) \leq g(x)$. *Тогда из сходимости интеграла* I_2 *следует сходимость интеграла* I_1, *причем имеет место неравенство* $I_1 \leq I_2$, *а из расходимости интеграла* I_1 *следует расходимость интеграла* I_2.

$\triangleleft$ Для любого $t \in (a, b)$ имеем в силу теоремы об интеграле Римана и неравенствах

$$0 \le F(t) = \int_a^t f(x)dx \le \int_a^t g(x)dx = G(t).$$

Если интеграл I_2 сходится, то в силу критерия Вейерштрасса функция $G(t)$ ограничена, а следовательно, ограничена и функция $F(t)$. В силу критерия Вейерштрасса I_1 сходится, причем

$$0 \le \int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b-} F(t) \le \lim_{t\to b-} G(t) = \int_a^b g(x)dx.$$

Если I_1 расходится, то

$$+\infty = \lim_{t\to b-} F(t) \le \lim_{t\to b-} G(t). \quad \triangleright$$

ТЕОРЕМА 7.3 (вторая теорема сравнения). *Пусть интегралы*

$$I_1 = \int_a^b f(x)dx, \quad I_2 = \int_a^b g(x)dx$$

имеют единственную особенность в точке b, и на промежутке (a,b) выполнены неравенства $0 \le f(x) < g(x)$. Кроме того, пусть существует конечный предел

$$\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = A > 0.$$

Тогда I_1 и I_2 одновременно сходятся или расходятся.

$\triangleleft$ Ввиду существования предела

$$\forall \varepsilon > 0 \quad (\varepsilon < A) \quad \exists c \in [a,b) \quad A - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < A + \varepsilon, \quad x \in (c,b),$$

и так как $g(x) > 0$ на $[a,b)$, то

$$(A-\varepsilon)g(x) < f(x) < (A+\varepsilon)g(x), \quad x \in (c,b). \tag{7.1}$$

Из сходимости интеграла I_2 следует сходимость интеграла

$$\int_c^b g(x)dx$$

(свойство 1), а отсюда следует сходимость интеграла

$$\int_c^b (A+\varepsilon)g(x)dx$$

(свойство 2). Поэтому из теоремы 7.2 следует сходимость интеграла

$$\int_c^b f(x)dx,$$

а следовательно, и интеграла I_1 (свойство 1).

Итак, мы доказали, что из сходимости I_2 следует сходимость I_1. Обратное утверждение доказывается аналогично с использованием левого неравенства в (7.1). $\triangleright$

5.8 Признаки Абеля - Дирихле сходимости несобственных интегралов

ЛЕММА 8.1. *Пусть $g \in C^1[a,+\infty)$, $f \in C[a,+\infty)$, а $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$. Если существует несобственный интеграл*

$$\int_a^{+\infty} g'_x F(x)dx = A,$$

и существует предел

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)F(x) = B,$$

то существует несобственный интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx = B - g(a)F(a) - A.$$

$\triangleleft$ Пусть $A \in \mathbb{R}$, $A > a$. Рассмотрим интеграл

$$\int_a^A f(x)g(x)dx = g(A)F(A) - g(a)F(a) - \int_a^A F(x)g'(x)dx.$$

Это равенство справедливо в силу формулы интегрирования по частям. Применение формулы Ньютона - Лейбница обусловлено требованиями непрерывности на f и непрерывной дифференцируемости на g. Переходя в равенстве к пределу при $A \to +\infty$, получим требуемое. $\triangleright$

Заметим, что лемма 8.1 является непрерывным аналогом преобразования Абеля в теории числовых рядов. Установим первый признак Абеля - Дирихле.

ТЕОРЕМА 8.1. *Пусть $g \in C^1[a, +\infty)$, $f \in C[a, +\infty)$, а $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, являющаяся ограниченной функцией (то есть $|F(x)| \leq M \ \forall x > a$), кроме того,*

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0, \quad I_{|g'|} = \int\limits_a^{+\infty} |g'(x)| dx < \infty.$$

Тогда существует несобственный интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x) g(x) dx.$$

$\triangleleft$ Доказательство теоремы сводится к проверке условий леммы 8.1. Действительно, $|g'(x)F(x)| \leq M|g'(x)|$, и потому интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g'(x)F(x)dx$ сходится абсолютно в силу сходимости интеграла $I_{|g'|}$. Кроме того,

$$|g(x)F(x)| \leq M|g(x)| \to 0 \quad \text{при} \quad x \to +\infty,$$

и потому существует предел

$$\lim_{x \to +\infty} g(x)F(x) = 0. \quad \triangleright$$

ТЕОРЕМА 8.2. *Пусть $g \in C^1[a, +\infty)$, $f \in C[a, +\infty)$, а $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, являющаяся ограниченной функцией (то есть $|F(x)| \leq M \ \forall x > a$), кроме того, функция g монотонно убывает при $x > a$ и*

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0.$$

Тогда существует несобственный интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx.$$

$\lhd$ Теорема сводится к предыдущей, если заметить, что

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A |g'(x)|dx = -\lim_{A\to+\infty}\int_a^A g'(x)dx =$$
$$= \lim_{A\to+\infty}(g(a) - g(A)) = g(a)$$

ввиду неположительности производной монотонно убывающей функции. $\rhd$

ПРИМЕР 8.1. Интегралы

$$I_1 = \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx, \quad I_2 = \int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}dx$$

удовлетворяют при $\alpha > 0$, $a > 0$ требованиям теоремы 8.2. Рассмотрим интеграл I_1 (I_2 рассматривается аналогично). Первообразная $F(x) = -\cos x$ функции $f(x) = \sin x$ ограничена, а функция $g(x) = x^{-\alpha}$ непрерывно дифференцируема на $(a, +\infty)$ и монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$. Следовательно, интеграл I_1 сходится.

Теперь исследуем связь несобственных интегралов и числовых рядов. Для этого рассмотрим интеграл

$$I = \int_a^b f(x)dx,$$

имеющий единственную особенность в точке b. Пусть

$$a = b_0 < b_1 < \dots < b_k < \dots < b, \quad \lim_{k\to\infty} b_k = b.$$

Тогда можно определить числовой ряд

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{b_k}^{b_{k+1}} f(x)dx.$$

ТЕОРЕМА 8.3. *Если сходится интеграл I, то ряд S тоже сходится, причем $I = S$.*

$$\triangleleft \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\int_{b_k}^{b_{k+1}} f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_{a}^{b_{n+1}} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx. \quad \triangleright$$

ТЕОРЕМА 8.4. *Если $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b)$, а ряд S сходится, то интеграл I тоже сходится, причем $I = S$.*

$\triangleleft$ В самом деле $\forall b' \in (a,b)$ $\exists n$ $(b_n \in (b',b)$. Поэтому, учитывая неотрицательность функции f, получим

$$F(b') = \int_{a}^{b'} f(x)dx \leq \int_{a}^{b_n} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{b_k}^{b_{k+1}} f(x)dx \leq I.$$

Если ряд S сходится, то функция $F(b')$ ограничена при $b' \in (a,b)$, и по критерию Вейерштрасса интеграл I сходится. Следовательно, по предыдущей теореме имеет место равенство $I = S$. $\triangleright$

КОНТРПРИМЕР 8.1. Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} \sin x dx,$$

очевидно, сходится, поскольку каждый его член

$$\int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} \sin x dx = -\cos x\Big|_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} = -1 + 1 = 0.$$

Но интеграл $\int\limits_0^\infty \sin t dt$ расходится, так как функция от x $\int\limits_0^x \sin t dt = 1 - \cos x$ не имеет предела при $x \to +\infty$. Этот пример показывает, что требование неотрицательности функции f в теореме 8.4 существенно.

ТЕОРЕМА 8.5. *Пусть функция $f \in C[0,+\infty)$ монотонно убывает и неотрицательна. Тогда интеграл*

$$\int_{0}^{\infty} f(x)dx$$

и ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k) = f(0) + f(1) + \dots$$

одновременно сходятся или расходятся.

$\triangleleft$ В силу монотонного убывания f имеют место неравенства

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k).$$

Суммируя их по k, получим

$$\sum_{k=0}^{n} f(k+1) = \sum_{k=1}^{n+1} f(k) \leq \int\limits_0^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=0}^{\infty} f(k).$$

Отсюда, учитывая, что все члены последовательностей в неравенствах монотонно возрастают, в силу критерия Вейерштрасса для последовательностей следует утверждение теоремы. $\triangleright$

Из теоремы 8.5, в частности, следует, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$ потому, что функция $(1+x)^{-\alpha}$ при $\alpha > 0$ непрерывна и монотонно убывает на $[0, +\infty)$ и

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)^\alpha} = \int\limits_1^{\infty} \frac{dy}{y^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha > 1, \\ +\infty, & \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим ситуацию, когда несобственный интеграл имеет особенности в нескольких точках. Пусть $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, причем интеграл

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx$$

имеет особенности только в точках a и b. Произвольная точка $c \in (a, b)$ делит интервал на две части, причем интегралы

$$I_1 = \int\limits_a^c f(x)dx, \quad I_2 = \int\limits_c^b f(x)dx$$

имеют единственные особенности в точках a и b соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.1. Будем говорить, что несобственный интеграл I сходится, если сходятся интегралы I_1, I_2, причем будем полагать $I = I_1 + I_2$.

Покажем, что это определение не зависит от выбора точки $c \in (a, b)$. Пусть, скажем, $a < c < c' < b$. Тогда

$$\int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^{c'} f(x)dx + \int\limits_{c'}^b f(x)dx =$$

$$= \int\limits_a^{c'} f(x)dx + \int\limits_{c'}^b f(x)dx.$$

Рассмотрим теперь общий случай.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.2. Пусть интервал (a, b) можно разбить точками $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_{n-1} < c_n = b$ на конечное число интервалов (c_k, c_{k+1}) таких, что каждый из интегралов

$$I_k = \int\limits_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)dx, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

имеет только одну особенность на одном из концов интервала (c_k, c_{k+1}). Несобственный интеграл I будем называть сходящимся, если сходится каждый интеграл I_k, причем будем полагать

$$I = \sum_{k=0}^{n-1} I_k.$$

В связи с этим определением рассмотрим следующий

ПРИМЕР 8.2. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{x} + \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x}.$$

Очевидно, он не сходится, поскольку не сходятся интегралы, стоящие справа. Именно,

$$\int\limits_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_{-1}^{-\varepsilon_1}, \quad \int\limits_{\varepsilon_2}^{1} \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_{\varepsilon_2}^{1}.$$

Отсюда

$$\int\limits_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{x} + \int\limits_{\varepsilon_2}^{1} \frac{dx}{x} = \ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Предела $\lim\limits_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0} \ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ не существует, если ε_1 и ε_2 стремятся к нулю независимо друг от друга.

Однако существует одно важное обобщение несобственного интеграла.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.3. Пусть $\int\limits_a^b f(x)dx$ – интеграл с единственной особенностью в точке $c \in (a, b)$. Будем говорить, что этот интеграл сходится *в смысле главного значения по Коши*, если существует конечный предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx \right) = p.v. \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Интеграл в примере 8.2 сходится в смысле главного значения по Коши, то есть

$$p.v. \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int\limits_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} \right) = 0.$$

5.9 Методы приближенного вычисления определенных интегралов

Одним из простейших методов приближенного вычисления определенных интегралов является *метод прямоугольников*. Пусть требуется вычислить определенный интеграл

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей посредством точек $a = x_0 < x_2 < x_4 < \cdots < x_{2n} = b$. Обозначим через x_{2k-1} точку, лежащую на середине отрезка $[x_{2k-2}, x_{2k}]$, $k = 1, \ldots, n$, и представим интеграл I в виде

$$I = \frac{b-a}{n}(f(x_1) + \cdots + f(x_{2n-1})) + R$$

Эта формула для вычисления приближенного значения интеграла I называется *формулой прямоугольников.*

ТЕОРЕМА 9.1. *Пусть* $f \in C^2[a,b]$. *Тогда существует точка* $\eta \in [a,b]$ *такая, что остаток*

$$R = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\eta).$$

$\triangleleft$ Сначала оценим интеграл

$$\int\limits_{-h}^{h} f(x)dx,$$

считая, что $f \in C^2[-h,h]$. Для этого проинтегрируем каждый из интегралов

$$I_1 = \int\limits_{-h}^{0} f''(x)(x+h)^2 dx, \quad I_2 = \int\limits_{0}^{h} f''(x)(x-h)^2 dx$$

по частям два раза. Для I_1 имеем

$$I_1 = (x+h)^2 f'(x)\Big|_{-h}^{0} - 2\int\limits_{-h}^{0} f'(x)(x+h)dx = f'(0)h^2 - 2f(0)h + 2\int\limits_{-h}^{0} f(x)dx.$$

Для I_2, аналогично действуя, получим

$$I_2 = f'(0)h^2 - 2f(0)h + 2\int\limits_{0}^{h} f(x)dx.$$

Складывая I_1 и I_2, получим

$$\int\limits_{-h}^{h} f(x)dx = 2f(0)h = \frac{I_1 + I_2}{2}.$$

Отсюда, используя теорему о среднем значении, имеем

$$\frac{I_1+I_2}{2}=\frac{1}{2}\int\limits_{-h}^{0} f''(x)(x+h)^2dx+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{h} f''(x)(x-h)^2dx=$$

$$=\frac{f''(\xi_1)}{2}\int\limits_{-h}^{0}(x+h)^2dx+\frac{f''(\xi_2)}{2}\int\limits_{0}^{h}(x-h)^2dx=\frac{h^3}{3}\cdot\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}.$$

Далее, поскольку f'' непрерывна на $[-h,h]$, то в силу теоремы Вейерштрасса об ограниченности непрерывной функции имеем

$$m=\min_{[-h,h]} f''(\xi)\le f''(\xi)\le \max_{[-h,h]} f''(\xi)=M\quad \forall\xi\in[-h,h].$$

Отсюда в силу теоремы Больцано - Коши о промежуточном значении найдется точка $\eta\in[-h,h]$ такая, что

$$f''(\eta)=\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}.$$

Окончательно имеем

$$\int\limits_{-h}^{h} f(x)dx=f(0)\cdot 2h+\frac{1}{24}f''(\eta)\cdot(2h)^3. \tag{9.1}$$

Вернемся теперь к интегралу I. Представим его в виде

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx=\int\limits_{x_0}^{x_2} f(x)dx+\dots+\int\limits_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx,$$

и к каждому из интегралов - слагаемых применим формулу (9.1):

$$I=\frac{b-a}{n}(f(x_1)+\dots+f(x_{2n-1}))+R_1+\dots+R_n,$$

где $\frac{b-a}{n}=2h$. Для суммы остатков $R_1+R_2+\dots+R_n=R$ имеем

$$R=\frac{(b-a)^3}{24n^2}\cdot\frac{f''(\eta_1)+\dots+f''(\eta_n)}{n}=\frac{(b-a)^3}{24n^2}f''(\eta),$$

причем существование точки $\eta\in[a,b]$, как и выше, устанавливается посредством теоремы Больцано - Коши. $\triangleright$

В ряде случаев вместо формулы прямоугольников удобно использовать *формулу трапеций*. Чтобы получить ее, интеграл представим в виде

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}(f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + f(x_n)) + R,$$

где $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ – точки разбиения отрезка $[a, b]$ на n равных частей длиной $\frac{b-a}{n}$, а $\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2} \cdot \frac{b-a}{n}$ – площадь трапеции с основаниями $f(x_{k-1})$ и $f(x_k)$ и высотой $\frac{b-a}{n}$. Символом R, как и выше, обозначим остаток. Заметив, что каждая величина $f(x_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, является основанием двух трапеций, формулу трапеций перепишем в виде

$$I = \frac{b-a}{2n}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right) + R.$$

Имеет место

ТЕОРЕМА 9.2. *Пусть* $f \in C^2[a, b]$. *Тогда существует точка* $\eta \in [a, b]$ *такая, что остаток*

$$R = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\eta).$$

$\triangleleft$ Оценим интеграл $\int\limits_{-h}^{h} f(x)dx$, считая, что $f \in C^2[-h, h]$. Для этого подвергнем двукратному интегрированию по частям интеграл $\int\limits_{-h}^{h} f''(x)(x^2-h^2)dx$. Получим

$$\int\limits_{-h}^{h} f''(x)(x^2-h^2)dx = f'(x)(x^2-h^2)\Big|_{-h}^{h} - 2\int\limits_{-h}^{h} xf'(x)dx =$$

$$-2h(f(-h) + f(h)) + 2\int\limits_{-h}^{h} f(x)dx.$$

Отсюда, используя теорему о среднем, получаем

$$\int\limits_{-h}^{h} f(x)dx = 2h\tfrac{f(-h)+f(h)}{2} + \tfrac{1}{2}\int\limits_{-h}^{h} f''(x)(x^2-h^2)dx =$$
$$= 2h\tfrac{f(-h)+f(h)}{2} - \tfrac{f''(\eta)}{2}\int\limits_{-h}^{h}(h^2-x^2)dx = 2h\tfrac{f(-h)+f(h)}{2} - \tfrac{f''(\eta)}{2}(2h)^3. \tag{9.2}$$

Теперь представим интеграл I в виде суммы

$$I = \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx,$$

и к каждому интегралу - слагаемому применим формулу (9.2). Получим

$$I = \frac{b-a}{2n}(f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)) + R_1 + \cdots + R_n,$$

где $\frac{b-a}{n} = 2h$, $R_k = \frac{f''(\eta_k)}{12}\cdot\frac{(b-a)^3}{n^3}$, $k = 1,\ldots,n$. Положив $R = R_1+\cdots+R_n$ и применив, как при доказательстве предыдущей теоремы, теорему Больцано - Коши о промежуточном значении, получим требуемое. $\triangleright$

Формулы прямоугольников и трапеций чаще всего используются при ручном счете. При машинном счете используется *формула Симпсона*[1] или *формула парабол*. Чтобы ее получить, разобьем отрезок $[a,b]$ на четное число $n = 2m$ равных частей: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{2m} = b$ и представим интеграл в виде

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2m}((f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2))+$$

$$+(f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4))+\cdots+(f(x_{2m-2})+4f(x_{2m-1})+f(x_{2m})))+R,$$

где слагаемое

$$\frac{b-a}{2m}(f(x_{2k-2})+4f(x_{2k-1})+f(x_{2k}))$$

[1]Томас Симпсон (1710-1761) – английский математик. Основные труды по геометрии, тригонометрии и математическому анализу. Основоположник теории ошибок.

представляет собой площадь криволинейной трапеции, лежащей под параболой, проходящей через точки $(x_{2k-2}, f(x_{2k-2}))$, $(x_{2k-1}, f(x_{2k-1}))$, $(x_{2k}, f(x_{2k}))$. Приводя подобные слагаемые, получаем

$$I = \frac{b-a}{6m}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{m} f(x_{2k}) + 4\sum_{k=1}^{m} f(x_{2k-1})\right) + R.$$

Для определения остатка R справедлива

ТЕОРЕМА 9.3. *Пусть* $f \in C^4[a, b]$. *Тогда существует точка* $\eta \in [a, b]$ *такая, что*

$$R = -\frac{(b-a)^5}{2880m^4} f^{(4)}(\eta).$$

$\triangleleft$ Сначала оценим интеграл $\int\limits_{-h}^{h} f(x)dx$, считая $f \in C^4[-h, h]$. Для этого подвергнем четырехкратному интегрированию по частям интегралы

$$I_1 = \int\limits_{-h}^{0} f^{(4)}(x+h)^3(x-h/3)dx, \quad I_2 = \int\limits_{0}^{h} f^{(4)}(x-h)^3(x+h/3)dx.$$

Для I_1 имеем

$$I_1 = f'''(x)(x+h)^3(x-h/3)\Big|_{-h}^{0} - f''(x)(x+h)^2(3(x-h/3)+(x+h))\Big|_{-h}^{0} +$$

$$+6f'(x)(x+h)((x-h/3)+(x-h))\Big|_{-h}^{0} - 6f(x)(4x+8/3h)\Big|_{-h}^{0} +$$

$$+24\int\limits_{-h}^{0} f(x)dx = -f'''(0)\frac{h^4}{3} + 4f'(0) - 8h(f(-h)+f(h)) + 24\int\limits_{-h}^{0} f(x)dx.$$

Для I_2 получим соответственно

$$I_2 = f'''(0)\frac{h^4}{3} - 4f'(0)h^2 - 8h(f(-h)+f(h)) + 24\int\limits_{0}^{h} f(x)dx.$$

Складывая I_1 и I_2, получим

$$\int\limits_{-h}^{h} f(x)dx = \frac{f(-h)+4f(0)+f(h)}{6}\cdot 12h + \frac{I_1+I_2}{24}.$$

Далее, к интегралам I_1 и I_2 применим теорему о среднем, учитывая неположительность функций $(x+h)^3(x-h/3)$, $(x-h)^3(x+h/3)$ на отрезках $[-h,0]$ и $[0,h]$ соответственно. Получим

$$\frac{I_1+I_2}{24} = \frac{1}{24}\left(f^{(4)}(\xi_1)\int\limits_{-h}^{0}(x+h)^3(x-h/3)dx + \right.$$

$$\left. + f^{(4)}(\xi_2)\int\limits_{0}^{h}(x-h)^3(x+h/3)dx\right) =$$

$$= \frac{h^5}{90}\cdot\frac{f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_2)}{2}.$$

Пользуясь теоремой Больцано - Коши, найдем точку $\eta \in [-h,h]$ такую, что

$$f^{(4)}(\eta) = \frac{f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_2)}{2},$$

и получим окончательно

$$\int\limits_{-h}^{h} f(x)dx = \frac{f(-h)+4f(0)+f(h)}{6}\cdot 2h - \frac{(2h)^5}{2880}f^{(4)}(\eta). \qquad (9.3)$$

Представив теперь интеграл I в виде суммы

$$I = \int\limits_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int\limits_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int\limits_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} f(x)dx$$

и применив к каждому интегралу - слагаемому формулу (9.3), получим требуемое. ▷

Свиридюк Георгий Анатольевич
Федоров Владимир Евгеньевич

Математический анализ
Часть I

Учебное пособие

Редактор В.Ф.Репецкая

Сдано в набор 16.11.98. Подписано в печать 17.05.99.
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 9,3. Уч.-изд. л. 8,7. Тираж 100 экз.
Заказ 70. Цена договорная

Челябинский государственный университет.
454021 Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129.

Полиграфический участок Издательского центра ЧелГУ.
454021 Челябинск, ул. Молодогвардейцев, 57-б.